

Estruturas de Informação

lista de exercícios 04

1. Elementos repetidos

Imagine que você tem uma matriz $M[n][n]$ que contém números inteiros.

Por exemplo,

3	9	4	2	4	1	8	5	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	8	2	3	9	8	4	1	7
8	3	4	2	3	1	3	9	4
3	7	2	9	4	2	1	2	3
7	5	3	1	2	4	5	8	2
4	7	3	6	5	1	9	3	2
1	5	3	2	9	8	7	6	5
3	9	4	2	4	1	8	5	1

A tarefa consiste em

→ *Verificar se existem dois elementos iguais na matriz M*

No exemplo acima, isso nos daria

=> Sim, o elemento 4 aparece mais de uma vez

Faça um programa que realiza essa tarefa.

2. Duas linhas iguais

Imagine que você tem uma matriz $M[n][n]$ que contém números inteiros.

Por exemplo,

3	9	4	2	4	1	8	5	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	8	2	3	9	8	4	1	7
8	3	4	2	3	1	3	9	4
3	7	2	9	4	2	1	2	3
7	5	3	1	2	4	5	8	2
4	7	3	6	5	1	9	3	2
1	5	3	2	9	8	7	6	5
3	9	4	2	4	1	8	5	1

A tarefa consiste em

→ *Verificar a matriz M contém duas linhas exatamente iguais*

No exemplo acima, isso nos daria

=> Sim, as linhas 1 e 9 são exatamente iguais

Faça um programa que realiza essa tarefa.

3. Mesma quantidade de zeros

Imagine que você tem uma matriz com dimensão $n^2 \times n^2$.

E imagine que essa matriz foi dividida em blocos com dimensão $n \times n$.

Por exemplo,

0	0	4	2	0	1	8	5	0
0	2	0	4	5	0	0	8	9
5	0	2	3	0	8	4	1	0
8	3	0	2	0	1	0	0	4
3	0	2	0	4	0	1	2	0
0	5	0	1	2	4	0	0	2
4	7	0	6	5	1	9	3	0
0	0	3	2	9	8	7	6	5
3	9	4	0	4	1	8	0	1

A tarefa consiste em

→ *Verificar se existem dois blocos com a mesma quantidade de zeros*

No exemplo acima, isso nos daria

=> Sim, os blocos 1×2 e 2×1 contém 3 zeros cada

Faça um programa que realiza essa tarefa.

4. Matriz Sudoku

Imagine que você tem uma matriz com dimensão $n^2 \times n^2$.

E imagine que essa matriz foi dividida em blocos com dimensão $n \times n$.

Por exemplo,

3	9	4	2	4	1	8	5	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	8	2	3	9	8	4	1	7
8	3	4	2	3	1	3	9	4
3	7	2	9	4	2	1	2	3
7	5	3	1	2	4	5	8	2
4	7	3	6	5	1	9	3	2
1	5	3	2	9	8	7	6	5
3	9	4	2	4	1	8	5	1

A tarefa consiste em

→ *Verificar se todos os blocos contém todos os números de 1 a n^2*

No exemplo acima, isso nos daria

=> Não, a coisa falha no bloco 1×1

Faça um programa que realiza essa tarefa.

5. Calculando o determinante (usando a regra da escola)

É bem fácil calcular o determinante de uma matriz de tamanho 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

(i.e., nós calculamos o produto dos elementos na diagonal, e depois subtraímos desse resultado o produto dos elementos na diagonal inversa)

E também é bem fácil fazer um programa que faz esse cálculo.

```
det <-- A[0][0] * A[1][1] - A[0][1] * A[1][0]
```

Também é fácil calcular o determinante de uma matriz 3×3 no papel.

Quer dizer, primeiro a gente calcula os produtos das seguintes diagonais

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 = 225$$

Depois a gente faz a mesma coisa com as diagonais inversas

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 9 + 1 \cdot 8 \cdot 6 = 225$$

E daí, a gente subtrai uma coisa da outra: $225 - 225 = 0$.

Mas, será que você consegue fazer um programa que faz isso?

6. Calculando o determinante (usando outra regra)

A regra da escola não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, existe uma outra regra baseada na definição matemática do determinante.

A ideia é a seguinte:

- Para calcular o determinante de uma matriz 3×3 ,
nós calculamos o determinante de 3 matrizes 2×2

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

(i.e., são as matrizes que a gente obtém eliminando a linha e a coluna de cada elemento a_i na primeira linha)

Suponha que os determinantes dessas 3 matrizes são

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3$$

Daí, a gente obtém o determinante de A da seguinte maneira

$$\det(A) = a_1 \cdot \Delta_1 - a_2 \cdot \Delta_2 + a_3 \cdot \Delta_3$$

a) Faça um programa que implementa essa ideia.

b) A boa notícia é que essa regra pode ser usada para matrizes de qualquer tamanho.

Por exemplo, se A é uma matriz 4×4 , então o seu determinante pode ser calculado da seguinte maneira

$$\det(A) = a_1 \cdot \Delta_1 - a_2 \cdot \Delta_2 + a_3 \cdot \Delta_3 - a_4 \cdot \Delta_4$$

onde

- a_1, a_2, a_3, a_4 são os elementos da primeira linha de A
- e cada Δ_i é o determinante da submatriz 3×3 que é obtida eliminando a linha e coluna do elemento a_i

Faça um programa que calcula o determinante de uma matriz 4×4 dessa maneira.

7. Matriz inversa

Como todo mundo sabe, a matriz inversa de A é a matriz A^{-1} que multiplicada por A dá a matriz identidade

$$A \times A^{-1} = I$$

Por exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um método bem simples para calcular a matriz inversa consiste em observar que a equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pode ser decomposta como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que correspondem aos sistemas lineares

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x + 4z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + 2w = 0 \\ 3y + 4w = 1 \end{cases}$$

A ideia consiste em resolver esses sistemas para obter os valores de x, y, z, w , que são os elementos da matriz inversa A^{-1}

Faça um programa que implementa essa ideia.

8. Campo minado

Seja A uma matriz $n \times m$ representa um campo minado. As minas são representadas com 1 e a ausência de mina com 0 em cada posição.

A matriz de perigo é uma matriz B em que, na posição (i, j) tem o número de minas ao redor dessa posição no campo minado A caso não haja uma mina na posição (i, j) , se houver uma mina na posição (i, j) , na matriz de perigo B deve haver -1 nessa posição.

Faça um programa que recebe uma matriz de campo minado A e computa a matriz de perigo B .

Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$