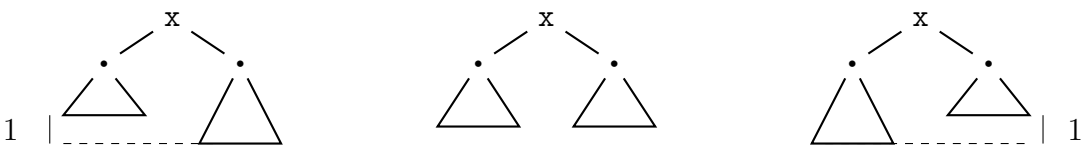


Argumento de balanceamento

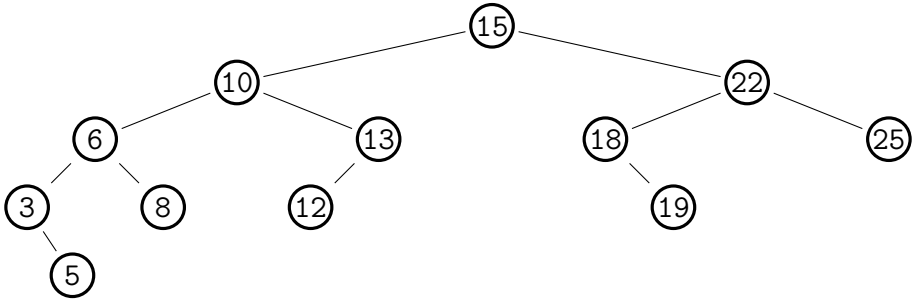
As árvores AVL controlam o balanceamento da árvore mantendo a seguinte propriedade

→ Para cada elemento, a diferença entre as alturas das subárvores esquerda e direita nunca é maior que 1

Abaixo nós temos uma ilustração dos 3 casos possíveis



E abaixo nós temos um exemplo de árvore AVL

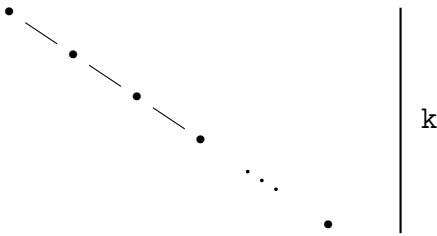


Daqui a pouco nós vamos ver como as operações de inserção e remoção são implementadas para garantir que a propriedade sempre se mantém.

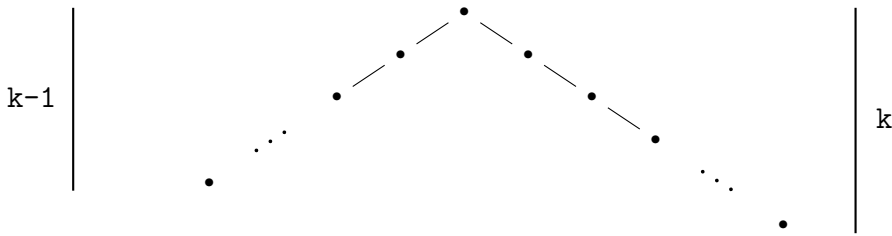
Mas antes disso, vejamos porque uma árvore com essa propriedade sempre tem altura $O(\log n)$.

A ideia é bem simples.

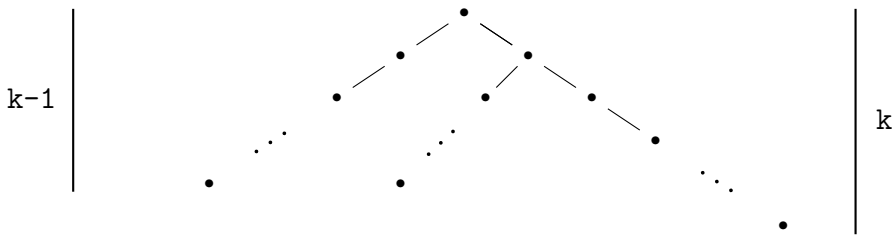
Imagine que o maior caminho da árvore tem tamanho k — (de modo que k é a altura da árvore)



Então, do outro lado deve haver um caminho com ao menos $k - 1$ elementos

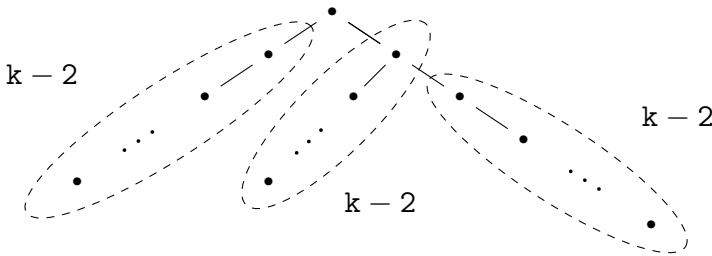


Agora, concentrando a atenção no segundo elemento do maior caminho, nós observamos que à sua esquerda deve haver um caminho com ao menos $k - 2$ elementos



Quer dizer, nós acabamos de descobrir que

→ A existência de um caminho de tamanho k na árvore AVL implica a existência de 3 caminhos (disjuntos) de tamanho $k - 2$



Ora, mas então

→ A existência de 3 caminhos de tamanho $k - 2$ implica a existência de $3 \times 3 = 3^2$ caminhos (disjuntos) de tamanho $k - 4$

e

→ A existência de 3^2 caminhos de tamanho $k - 4$ implica a existência de 3^3 caminhos (disjuntos) de tamanho $k - 6$

Daí, levando a repetição até o fim, nós concluímos que

→ A existência de um caminho de tamanho k na árvore AVL implica a existência de $3^{k/2}$ caminhos (disjuntos) de tamanho 1

Ou, em outras palavras

→ A existência de um caminho de tamanho k na árvore AVL implica que a árvore contém ao menos $3^{k/2}$ elementos

Denotando o número de elementos na árvore por n , nós podemos escrever

$$n \geq 3^{k/2}$$

E agora, tomando o $\log_3$ dos dois lados, nós chegamos ao seguinte resultado

$$\frac{k}{2} \leq \log_3 n$$

Daí que, toda árvore AVL tem altura $O(\log n)$.

Legal, não é?