

Matemática Discreta

aula 01: Jogos de montar e desmontar

1 Introdução

Nós vamos começar a disciplina de matemática discreta calculando a soma

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

Bom, o truque mais velho do mundo para calcular essa soma é o seguinte

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ + & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Quer dizer, a gente escreveu a soma outra vez, ao contrário, embaixo da soma original.

E ao somar as colunas, todas as parcelas ficaram iguais.

Daí, como são n parcelas no total, nós descobrimos que a soma das duas somas é igual a

$$n \cdot (n+1)$$

Mas as duas somas são a mesma coisa.

Logo, cada soma é igual a

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, agora imagine que n é par.

Então, $n/2$ é um número inteiro, e ele aparece no meio da nossa soma

$$1 + 2 + \dots + \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} + 1\right) + \dots + n$$

Daí, a gente quebra a soma bem no meio

$$1 + 2 + \dots + \frac{n}{2} \quad \vdots \quad \left(\frac{n}{2} + 1\right) + \dots + n$$

E escreve a segunda metade, ao contrário, embaixo da primeira metade, e depois soma as colunas

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & + & 2 & + & \dots & + & \frac{n}{2} \\ + & n & + & (n-1) & + & \dots & + & \frac{n}{2} + 1 \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) \end{array}$$

Quer dizer, ficou tudo igual outra vez.

E como são $n/2$ parcelas no total, a gente descobre que a nossa soma vale

$$\frac{n}{2} \cdot (n+1)$$

— (o que é uma coisa que a gente já sabia ...)

Certo.

Mas, ainda tem o caso em que n é ímpar.

Nesse caso, $\frac{n-1}{2}$ e $\frac{n+1}{2}$ são números inteiros, que aparecem no meio da nossa soma

$$1 + 2 + \dots + \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} + \dots + (n-1) + n$$

Só que dessa vez, não dá pra quebrar a soma no meio — (porque?)

Sim, não dá.

Mas essa soma tem um elemento central

E se a gente descobre quem é o elemento central, a gente pode quebrar a soma assim

$$1 + 2 + \dots + \left. \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right\} \textcircled{?} \left. \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right\} \dots + (n-1) + n$$

Hmm ...

Agora, a gente precisa descobrir quem é o elemento central.

Para fazer isso, a gente lembra que n é ímpar.

Logo, $n-1$ é par.

Logo, a gente pode desmontar o n assim

$$n = \frac{n-1}{2} + 1 + \frac{n-1}{2}$$

E ao fazer isso, a gente vê que

$$\underbrace{1 + 2 + \dots}_{\frac{n-1}{2} \text{ elementos}} + \left. \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right\} \textcircled{?} \left. \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right\} \underbrace{\dots + (n-1) + n}_{\frac{n-1}{2} \text{ elementos}}$$

1
elemento

Quer dizer, a soma é quebrada assim

$$1 + 2 + \dots + \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} + \frac{n+3}{2} + \dots + (n-1) + n$$

Agora, é só aplicar o nosso truque outra vez

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & \dots & + & \frac{n-1}{2} & + & \frac{n+1}{2} & & \\ + & n & + & (n-1) & + & \dots & + & \frac{n+3}{2} & & & \\ \hline & & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & \frac{n+1}{2} \end{array}$$

E depois a gente faz a conta

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{2} \cdot (n+1) + \frac{n+1}{2} &= \frac{n+1}{2} \cdot (n-1+1) \\ &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \end{aligned}$$

Não é legal?

Sim, mas a gente podia ter sido um pouquinho mais esperto.

Quer dizer, se n é ímpar, então $n-1$ é par.

Daí que, a gente pode escrever a soma assim

$$(1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) + n$$

E daí, a gente pode aplicar a fórmula para o caso par na soma entre parênteses

$$\frac{(n-1)}{2} \cdot ((n-1) + 1) + n$$

E agora, é só fazer a conta pra chegar na mesma coisa outra vez ...

2 Jogos de montar e desmontar

Certo.

Mas, vamos olhar para a soma outra vez

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

Porque a gente ainda não viu tudo o que tinha pra ver.

Mas, o que é que ainda tem para ver aqui?

Bom, a gente pode ver que

- o 2 é igual a $1 + 1$

- e o 3 é igual a $1 + 2$
- e o 4 é igual a $1 + 3$
- e por aí vai ...

Daí que, a gente pode reescrever a nossa soma assim

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 1 + (1+1) + (1+2) + \dots + (1 + (n-1))$$

E daí, a gente desmonta o lado direito assim

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 2 + \dots + n-1$$

Quer dizer, a nossa soma apareceu do lado direito outra vez — (*ou quase ...*)

Daí, cancelando os termos iguais dos dois lados, a gente chega nisso aqui

$$n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

O que é uma coisa que a gente já sabia — (*ou será que não?*)

Só que isso não serve para nada ...

Ou será que serve?

Bom, usando isso, a gente pode reescrever a nossa soma assim

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n & = & 1 & + & 1 & + & 1 & + & \dots & + & 1 \\ & & & & & & & & & & & + & 1 & + & 1 & + & \dots & + & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & + & 1 & + & \dots & + & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & + & 1 \end{array}$$

Sim, um triângulo!

E dois triângulos formam um retângulo

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & & 1 & + & 1 & + & 1 & + & \dots & + & 1 \\ 1 & + & 1 & & & + & 1 & + & 1 & + & \dots & + & 1 \\ 1 & + & 1 & + & 1 & & & + & 1 & + & \dots & + & 1 \\ \vdots & & & & & & \ddots & & & & \ddots & & \vdots \\ 1 & + & 1 & + & 1 & + & \dots & + & 1 & & & + & 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ n \end{array}$$

$n+1$

Um retângulo com altura n e base $n + 1$ contém

$$n \cdot (n + 1) \quad \text{cópias do 1}$$

Só que o retângulo são dois triângulos.

E o triângulo é a nossa soma.

Logo, a gente descobriu outra vez que

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, vamos olhar para a nossa soma outra vez

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

Só que dessa vez, a gente coloca a atenção no lado direito.

E o que é que a gente vê ali?

Bom, a gente vai vendo isso aqui

$$\dots + (n - 3) + (n - 2) + (n - 1) + n$$

Quer dizer, todo mundo é o n menos alguma coisa

Daí, voltando para o lado esquerdo, a gente vê que

- o 3 é igual a n menos $n - 3$
- o 2 é igual a n menos $n - 2$
- e o 1 é igual a n menos $n - 1$

Daí que, a gente pode reescrever a nossa soma assim

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = (n - (n - 1)) + (n - (n - 2)) + \dots + (n - 1) + n$$

Daí, a gente desmonta o lado direito assim

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n + n + \dots + n + n - (n - 1) - (n - 2) - \dots - 1$$

e depois a gente reescreve a coisa assim

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n + n + n + \dots + n - (1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1))$$

Quer dizer, a nossa soma apareceu no lado direito outra vez — (*ou quase ...*)

Só que dessa vez, a soma apareceu com o sinal negativo.

Então, a gente passa ela para o outro lado

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n + n + n + \dots + n$$

$$+ \left(1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) \right)$$

Adiciona n dos dois lados

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n + n + n + \dots + n + n$$

$$+ \left(1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) \right) + n$$

Reescreve a coisa assim

$$2 \cdot \left(1 + 2 + 3 + \dots + n \right) = n \cdot (n+1)$$

e depois assim

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Legal, não é?

3 Somando PA's

Considere a soma

$$8 + 11 + 14 + \dots + 68 + 71 + 74$$

E vamos aplicar o mesmo truque outra vez

$$\begin{array}{ccccccccccc} 8 & + & 11 & + & 14 & + & \dots & + & 68 & + & 71 & + & 74 \\ 74 & + & 71 & + & 68 & + & \dots & + & 14 & + & 11 & + & 8 \\ \hline 82 & + & 82 & + & 82 & + & \dots & + & 82 & + & 82 & + & 82 \end{array}$$

Quer dizer, a coisa deu certo outra vez — (*porque?*)

Mas para saber quanto é isso, é preciso descobrir quantas parcelas nós temos aqui.

Bom, o padrão dessa soma é que os números vão pulando de 3 em 3

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 3 & & 3 & & & & 3 & & 3 & & \\ & \frown & & \frown & & & & \frown & & \frown & & & \\ 8 & + & 11 & + & 14 & + & \dots & + & 68 & + & 71 & + & 74 \end{array}$$

Daí que, a gente pode reescrever o começo da soma assim

$$8 + (8 + 3) + (8 + 2 \cdot 3) + (8 + 3 \cdot 3) + \dots$$

E isso significa que o último termo tem a forma

$$74 = 8 + k \cdot 3$$

Ora, essa é uma equação bem fácil de resolver.

E fazendo a conta, a gente descobre que $k = 22$.

Quer dizer, a nossa soma é a seguinte

$$8 + (8 + 3) + (8 + 2 \cdot 3) + \dots + (8 + 22 \cdot 3)$$

Agora, já não é difícil ver que a soma tem 23 parcelas.

Logo a nossa soma vale

$$\frac{82 \times 23}{2} = 943$$

Legal, não é?

3.1 A fórmula da soma da PA

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, a gente também pode reescrever a nossa soma assim

$$\begin{aligned} 8 + 8 + 8 + 8 + \dots + 8 \\ + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + \dots + 22 \cdot 3 \end{aligned}$$

Daí, colocando o 3 em evidência, a gente obtém

$$\begin{aligned} 8 + 8 + 8 + 8 + \dots + 8 \\ + 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 22) \end{aligned}$$

Ora, mas a gente já conhece a soma dentro dos parênteses.

E aplicando a fórmula sobre ela, a gente obtém

$$\begin{aligned} 8 \cdot 23 + 3 \cdot \frac{22}{2} \cdot (22 + 1) \\ = 8 \cdot 23 + 3 \cdot 11 \cdot 23 \\ = 41 \cdot 23 \\ = 943 \end{aligned}$$

Uma sequência onde os números sempre vão crescendo pela mesma quantidade é chamada de *progressão aritmética* (PA) — (*como todo mundo sabe ...*)

Daí que, a forma geral da soma de uma PA é a seguinte

$$a + (a + k) + (a + 2k) + (a + 3k) + \dots + (a + nk)$$

Olhando para a soma, a gente vê que o nosso truque pode ser aplicado outra vez

$$\begin{array}{ccccccccccc} a & & + & & (a + k) & & + & \dots & + & (a + (n-1)k) & + & (a + nk) \\ + & (a + nk) & + & (a + (n-1)k) & + & \dots & + & (a + k) & + & a \\ \hline (2a + nk) & + & (2a + nk) & + & \dots & + & (2a + nk) & + & (2a + nk) \end{array}$$

Dessa vez, não é difícil ver que nós temos $n + 1$ parcelas no total.

Logo, a soma da PA vale

$$\frac{(n + 1) \cdot (2a + nk)}{2}$$

Daí, a gente pode reescrever a coisa assim

$$(n + 1) \cdot \frac{(a + (a + nk))}{2}$$

E depois assim

$$\text{número de elementos} \times \frac{(1^\circ \text{ elemento} + \text{último elemento})}{2}$$

que é a fórmula que a gente aprende na escola ...

4 Somando PG's

Agora considere uma soma de potências de 2

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n$$

Um truque que nem todo mundo conhece consiste em adicionar 1 a essa soma, e depois fazer as contas assim

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 1 & + & 2 & + & 4 & + & 8 & + & \dots & + & 2^n \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & & & & & \\ = 2 & & = 4 & & = 8 & & & & & & & & \end{array}$$

Quer dizer, a cada passo, a gente obtém o próximo termo da soma.

Daí que, continuando assim até o fim, a gente chega no seguinte

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 1 & + & 1 & + & 2 & + & 4 & + & 8 & + & \dots & + & 2^n \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 = 2 & & = 4 & & = 8 & & \dots & & = 2^n & & = 2^{n+1}
 \end{array}$$

— (*esse é o truque do peteleco — porque?*)

Mas, isso é o resultado da soma adicionada de 1.

Logo, a soma original vale

$$2^{n+1} - 1$$

Legal, não é?

Agora a gente pode tentar aplicar o mesmo truque na soma das potências de 3

$$1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^n$$

Mas daí, a gente vê que a coisa não funciona.

Quer dizer, somar 1 não dá certo

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 1 & + & 1 & + & 3 & + & 9 & + & 27 & + & \dots & + & 3^n \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & & & & & & & & & \\
 = 2 & & & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

E somar 2 também não dá certo

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 2 & + & 1 & + & 3 & + & 9 & + & 27 & + & \dots & + & 3^n \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & & & & & & & \\
 = 3 & & = 6 & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

E agora?

Bom, agora é a hora para uma pequena esperteza.

Quer dizer, a ideia é considerar duas cópias da soma, e daí adicionar 1

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 1 & + & 3 & + & 9 & + & 27 & + & \dots & + & 3^n \\
 + & 1 & + & 3 & + & 9 & + & 27 & + & \dots & + & 3^n \\
 + & 1 & & & & & & & & & & & \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 = 3 & & = 9 & & = 27 & & \dots & & = 3^n & & = 3^{n+1}
 \end{array}$$

Mas, isso é o resultado de duas cópias da soma adicionadas de 1.

Logo a soma original vale

$$\frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

Legal.

E para fazer a coisa funcionar com essa soma aqui

$$1 + 4 + 16 + 64 + \dots + 4^n$$

a ideia é considerar 3 cópias da soma, e depois adicionar 1

$$\begin{array}{r} 1 + 4 + 16 + 64 + \dots + 4^n \\ + 1 + 4 + 16 + 64 + \dots + 4^n \\ + 1 + 4 + 16 + 64 + \dots + 4^n \\ + 1 \end{array}$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{= 4} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{= 16} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{= 64} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\dots} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{= 4^n} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{= 4^{n+1}}$$

E assim, a gente descobre que a soma original vale

$$\frac{4^{n+1} - 1}{3}$$

Nesse ponto, a gente já entendeu o princípio da coisa.

Daí, se alguém nos dá a seguinte soma

$$1 + k + k^2 + k^3 + \dots + k^n$$

a gente já pode advinhar que isso vale

$$\frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$$

O que acontece quando k não é um número inteiro?

Você consegue adaptar o truque?

4.1 O truque mais velho do mundo

Mas, existe um truque bem velho para calcular somas de PG.

Considere outra vez a soma

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n$$

O primeiro passo é dar um nome para a soma

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n$$

Daí, a gente multiplica os dois lados por 2

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^{n+1}$$

Fazendo isso, a gente vê que S e $2S$ tem quase todos os termos iguais.

Daí que, subtraindo uma coisa da outra acontece um monte de cancelamentos

$$\begin{array}{rcl}
 2S & = & \cancel{2} + \cancel{4} + \cancel{8} + \cancel{16} + \dots + 2^{n+1} \\
 - \quad S & = & 1 + \cancel{2} + \cancel{4} + \cancel{8} + \dots + \cancel{2^n} \\
 \hline
 2S - S & = & 2^{n+1} - 1
 \end{array}$$

Só que $2S - S$ é igual a S .

Logo

$$S = 2^{n+1} - 1$$

— (o que é uma coisa que a gente já sabia ...)

É bem fácil ver que o truque também funciona com a soma de potências de 3

$$1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^n$$

Só que dessa vez, a ideia é multiplicar a soma por 3 e depois subtrair

$$\begin{array}{rcl}
 3S & = & \cancel{3} + \cancel{9} + \cancel{27} + \cancel{81} + \dots + 3^{n+1} \\
 - \quad S & = & 1 + \cancel{3} + \cancel{9} + \cancel{27} + \dots + \cancel{3^n} \\
 \hline
 3S - S & = & 3^{n+1} - 1
 \end{array}$$

Fazendo isso, a gente descobre que

$$1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

E o truque também funciona com a PG de razão $2/3$

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots + \frac{2^n}{3^n}$$

Quer dizer, primeiro a gente dá um nome para a soma

$$S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots + \frac{2^n}{3^n}$$

Daí, a gente multiplica os dois lados por $2/3$

$$\frac{2}{3} \cdot S = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \dots + \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}$$

E daí, subtraindo uma coisa da outra, a gente obtém

$$S - \frac{2}{3} \cdot S = 1 - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}$$

o que nos dá

$$S = 3 - \frac{2^{n+1}}{3^n}$$

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, considere outra vez a soma

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n$$

E note que todos os termos do lado direito são pares — (*com a exceção do 1 ...*)

Isso significa que nós podemos colocar o 2 em evidência

$$S = 1 + 2 \cdot (1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1})$$

Mas, você viu o que aconteceu?

Quer dizer, nós encontramos a soma dentro da soma — (*ou quase ...*)

$$S = 1 + 2 \cdot \underbrace{(1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1})}_{S - 2^n}$$

Isso nos permite reescrever a coisa assim

$$S = 1 + 2 \cdot (S - 2^n)$$

e depois assim

$$S = 2^{n+1} - 1$$

Não é legal?

4.2 A fórmula da soma da PG

Agora considere a soma

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \dots + 1536 + 3072$$

Examinando os termos atentamente, a gente identifica o seguinte padrão repetitivo

$$\begin{array}{ccccccc} & \times 2 & & \times 2 & & \times 2 & & \times 2 & & \times 2 \\ \frown & & \frown & & \frown & & \frown & & \frown \\ 3 & + & 6 & + & 12 & + & 24 & + & 48 & \dots + & 1536 & + & 3072 \end{array}$$

E vendo isso, a gente já poderia aplicar o nosso truque.

Mas dessa vez, a gente vai fazer as coisas de maneira diferente.

Quer dizer, a gente começa dando um nome para a soma

$$S = 3 + 6 + 12 + 24 + \dots + 1536 + 3072$$

Daí a gente nota que a partir da segunda posição todos os termos são pares.

Logo, a gente pode colocar o 2 em evidência

$$S = 3 + 2 \cdot [3 + 6 + 12 + \dots + 768 + 1536]$$

Sim! a soma apareceu dentro da própria soma (ou quase)

$$S = 3 + 2 \cdot \underbrace{[3 + 6 + 12 + \dots + 768 + 1536]}_{S - 3072}$$

Logo, a gente pode reescrever a coisa assim

$$S = 3 + 2 \cdot [S - 3072]$$

e depois assim

$$S = 3 + 2S - 2 \cdot 3072$$

e depois assim

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot 3072 - 3 \\ &= 6139 \end{aligned}$$

Legal, não é?

Uma sequência onde os números vão sempre sendo multiplicados pela mesma quantidade é chamada de progressão geométrica (PG) — (*como todo mundo sabe ...*)

Daí que, a forma geral da soma de uma PG é a seguinte

$$\alpha + \alpha \cdot k + \alpha \cdot k^2 + \alpha \cdot k^3 + \dots + \alpha \cdot k^n$$

Olhando para essa soma, a gente vê que o nosso truque pode ser aplicado outra vez.

Quer dizer, a gente começa dando um nome para a soma

$$S = \alpha + \alpha \cdot k + \alpha \cdot k^2 + \alpha \cdot k^3 + \dots + \alpha \cdot k^n$$

Daí, a gente nota que a partir da segunda posição todos os termos são múltiplos de k .

Logo, a gente pode colocar o k em evidência

$$S = \alpha + k \cdot [\alpha + \alpha \cdot k + \alpha \cdot k^2 + \dots + \alpha \cdot k^{n-1}]$$

Sim! a soma apareceu dentro da própria soma (ou quase)

$$S = \alpha + k \cdot \underbrace{\left[\alpha + \alpha \cdot k + \alpha \cdot k^2 + \dots + \alpha \cdot k^{n-1} \right]}_{S - \alpha \cdot k^n}$$

Logo, a gente pode reescrever a coisa assim

$$S = \alpha + k \cdot [S - \alpha \cdot k^n]$$

e depois assim

$$S = \alpha + kS - \alpha \cdot k^{n+1}$$

e depois assim

$$kS - S = \alpha \cdot k^{n+1} - \alpha$$

e depois assim

$$S = \frac{\alpha \cdot k^{n+1} - \alpha}{k - 1}$$

e depois assim

$$\frac{\text{razão} \cdot (\text{último termo}) - \text{primeiro termo}}{\text{razão} - 1}$$

que é a fórmula que a gente aprende na escola ...

5 Uma soma diferente

Sim, mas tem uma coisa ainda mais legal.

Considere a seguinte soma

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n$$

Isso não é uma soma de PA, e nem é uma soma de PG.

Mas, nada nos impede de tentar o nosso truque outra vez.

Quer dizer, nós multiplicamos a coisa toda por 2 e depois subtraímos S

$$\begin{aligned} 2S - S &= 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^5 + \dots + n \cdot 2^{n+1} \\ &\quad - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^4 - \dots - n \cdot 2^n \end{aligned}$$

Só que dessa vez, não surgiu nenhuma oportunidade de cancelamento.

E agora?

Bom, agora é a hora para uma pequena esperteza.

Quer dizer, a ideia é escrever a subtração assim

$$\begin{aligned} 2S - S &= 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \dots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1} \\ &\quad - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^4 - \dots - n \cdot 2^n \end{aligned}$$

Daí, fazendo a conta por colunas, nós chegamos a

$$- 1 \cdot 2 - 2^2 - 2^3 - 2^4 - \dots - 2^n + n \cdot 2^{n+1}$$

o que a gente também pode escrever assim

$$n \cdot 2^{n+1} - \left(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n \right)$$

Ali dentro dos parênteses tem uma soma de PG.

E nós já sabemos como calcular essa soma para obter

$$2^{n+1} - 2$$

Daí que, a coisa toda vale

$$n \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} + 2$$

o que a gente também pode escrever assim

$$(n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, olhando para a soma outra vez

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n$$

a gente observa que ela também pode ser escrita assim

$$\begin{array}{rcl} S & = & 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n \\ & & + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n \\ & & \quad + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n \\ & & \quad \quad + 2^4 + \dots + 2^n \\ & & \quad \quad \quad \dots \quad \dots \\ & & \quad \quad \quad \quad + 2^n \end{array}$$

onde cada linha é uma soma de PG.

Mas, soma de PG é uma coisa que a gente já sabe resolver

Daí que, a gente pode calcular o valor de cada linha em separado

$$\begin{array}{rcl}
 S & = & 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n \longrightarrow 2^{n+1} - 2 \\
 & & + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n \longrightarrow 2^{n+1} - 2^2 \\
 & & \quad + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n \longrightarrow 2^{n+1} - 2^3 \\
 & & \quad \quad + 2^4 + \dots + 2^n \longrightarrow 2^{n+1} - 2^4 \\
 & & \quad \quad \quad \dots \quad \dots \longrightarrow \dots \\
 & & \quad \quad \quad \quad + 2^n \longrightarrow 2^{n+1} - 2^n
 \end{array}$$

O próximo passo é escrever a soma de resultados assim

$$n \cdot 2^{n+1} - \left(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n \right)$$

calcular a soma de PG dentro dos parênteses

$$n \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} + 2$$

e chegar outra vez a

$$(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, olhe mais uma vez para essa soma

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n$$

Agora, você consegue encontrar a soma dentro da soma?

6 Voltando ao início

Depois de ter aprendido tanta coisa, a gente pode olhar outra vez para isso aqui

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

Só que dessa vez, a gente vai fazer as coisas de um jeito diferente.

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

onde o nome diz quantos termos a soma tem.

Daí, a gente assume que n é par, e reescreve a coisa assim

$$S_n = 1 + 2 + \dots + \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} + 1\right) + \left(\frac{n}{2} + 2\right) + \dots + n$$

E daí, a esperteza é subtrair $n/2$ dos termos da segunda metade

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & \frac{n}{2} \\
 & & & & \underbrace{\hspace{10em}} & & & & & & & & \\
 1 & + & 2 & + & \dots & + & \frac{n}{2} & + & \cancel{\left(\frac{n}{2} + 1\right)} & + & \cancel{\left(\frac{n}{2} + 2\right)} & + & \dots & + & \cancel{n} \\
 & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & & & \downarrow \\
 & & & & \frac{n}{2} & & & + & \frac{n}{2} & & + & \dots & + & \frac{n}{2} \\
 & & & & \underbrace{\hspace{10em}} & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \frac{n}{2} \text{ termos} & & & & & &
 \end{array}$$

Quer dizer, embaixo apareceu um monte de termos $n/2$.

E em cima apareceu outra cópia da primeira metade.

Mas, a primeira metade é a soma $S_{\frac{n}{2}}$.

Então, a gente pode reescrever a coisa assim

$$S_n = 2 \cdot S_{\frac{n}{2}} + \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

Legal.

Só que, $S_{\frac{n}{2}}$ é basicamente a mesma coisa que S_n .

Então, se $n/2$ for par, a gente pode fazer a mesma coisa outra vez

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & \frac{n}{4} \\
 & & & & \underbrace{\hspace{10em}} & & & & & & & & \\
 S_{\frac{n}{2}} & = & 1 & + & 2 & + & \dots & + & \frac{n}{4} & + & \cancel{\left(\frac{n}{4} + 1\right)} & + & \cancel{\left(\frac{n}{4} + 2\right)} & + & \dots & + & \cancel{\frac{n}{2}} \\
 & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & & & \frac{n}{4} & & & + & \frac{n}{4} & & + & \dots & + & \frac{n}{4} \\
 & & & & \underbrace{\hspace{10em}} & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \frac{n}{4} \text{ termos} & & & & & &
 \end{array}$$

E daí, a gente descobre que

$$S_{\frac{n}{2}} = 2 \cdot S_{\frac{n}{4}} + \left(\frac{n}{4}\right)^2$$

Substituindo essa expressão na equação acima, a gente obtém

$$\begin{aligned}
 S_n &= 2 \cdot \left[2 \cdot S_{\frac{n}{4}} + \left(\frac{n}{4}\right)^2 \right] + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \\
 &= 4 \cdot S_{\frac{n}{4}} + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{8}
 \end{aligned}$$

Nesse ponto, a gente já pode adivinhar que

$$S_{\frac{n}{4}} = 2 \cdot S_{\frac{n}{8}} + \left(\frac{n}{8}\right)^2$$

— (se $n/4$ for par ...)

De modo que

$$\begin{aligned} S_n &= 2 \cdot \left[2 \cdot S_{\frac{n}{8}} + \left(\frac{n}{8} \right)^2 \right] + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{8} \\ &= 8 \cdot S_{\frac{n}{8}} + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^2}{16} \end{aligned}$$

E a gente pode continuar fazendo isso até chegar em

$$S_{\frac{n}{n}} = S_1 = 1$$

— (se n for uma potência de 2 ...)

Então, escrevendo $n = 2^k$, a gente obtém o seguinte

$$S_n = 2^k \cdot S_{\frac{n}{2^k}} + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^2}{16} + \dots + \frac{n^2}{2^{k+1}}$$

o que a gente reescreve assim

$$S_n = 2^k + \frac{n^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k} \right)$$

Quer dizer, apareceu uma soma de PG dentro dos parênteses, que a gente resolve assim

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-2}} + \frac{1}{2^{k-3}} + \dots + \frac{1}{2} \\ &\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{= \frac{1}{2^{k-1}}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{= \frac{1}{2^{k-2}}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{= \frac{1}{2^{k-3}}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{= \frac{1}{2}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{= 1} \end{aligned}$$

Quer dizer, a soma vale

$$1 - \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{n}$$

Daí, substituindo esse resultado na expressão original, nós obtemos

$$S_n = \frac{n^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) + n$$

o que a gente reescreve assim

$$S_n = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + n$$

e depois assim

$$S_n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

e depois assim

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

o que a gente já sabia desde o início ...