

O truque mais velho do mundo

Nós vamos começar a disciplina de matemática discreta calculando a soma

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

Bom, o truque mais velho do mundo para calcular essa soma é o seguinte

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ + & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Quer dizer, a gente escreveu a soma outra vez, ao contrário, embaixo da soma original.

E ao somar as colunas, todas as parcelas ficaram iguais.

Daí, como são n parcelas no total, nós descobrimos que a soma das duas somas é igual a

$$n \cdot (n+1)$$

Mas as duas somas são a mesma coisa.

Logo, cada soma é igual a

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, agora imagine que n é par.

Então, $n/2$ é um número inteiro, e ele aparece no meio da nossa soma

$$1 + 2 + \dots + \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} + 1\right) + \dots + n$$

Daí, a gente quebra a soma bem no meio

$$1 + 2 + \dots + \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} + 1\right) + \dots + n$$

E escreve a segunda metade, ao contrário, embaixo da primeira metade, e depois soma as colunas

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & + & 2 & + & \dots & + & \frac{n}{2} \\ + & n & + & (n-1) & + & \dots & + & \frac{n}{2} + 1 \\ \hline & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) \end{array}$$

Quer dizer, ficou tudo igual outra vez.

E como são $n/2$ parcelas no total, a gente descobre que a nossa soma vale

$$\frac{n}{2} \cdot (n+1)$$

— *(o que é uma coisa que a gente já sabia ...)*

Certo.

Mas, ainda tem o caso em que n é ímpar.

Nesse caso, $\frac{n-1}{2}$ e $\frac{n+1}{2}$ são números inteiros, que aparecem no meio da nossa soma

$$1 + 2 + \dots + \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} + \dots + (n-1) + n$$

Só que dessa vez, não dá pra quebrar a soma no meio — *(porque?)*

Sim, não dá.

Mas essa soma tem um elemento central

E se a gente descobre quem é o elemento central, a gente pode quebrar a soma assim

$$1 + 2 + \dots + \left(\frac{n-1}{2}\right) + \left(\frac{n+1}{2}\right) + \dots + (n-1) + n$$

Hmm ...

Agora, a gente precisa descobrir quem é o elemento central.

Para fazer isso, a gente lembra que n é ímpar.

Logo, $n-1$ é par.

Logo, a gente pode desmontar o n assim

$$n = \frac{n-1}{2} + 1 + \frac{n-1}{2}$$

E ao fazer isso, a gente vê que

$$\underbrace{1 + 2 + \dots}_{\frac{n-1}{2} \text{ elementos}} + \left(\frac{n-1}{2}\right) + \underbrace{\dots + (n-1)}_{\frac{n-1}{2} \text{ elementos}} + n$$

Quer dizer, a soma é quebrada assim

$$1 + 2 + \dots + \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} + \frac{n+3}{2} + \dots + (n-1) + n$$

Agora, é só aplicar o nosso truque outra vez

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & + & 2 & + & \dots & + & \frac{n-1}{2} & + & \frac{n+1}{2} \\ + & n & + & (n-1) & + & \dots & + & \frac{n+3}{2} \\ \hline & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & \frac{n+1}{2} \end{array}$$

E depois a gente faz a conta

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{2} \cdot (n+1) + \frac{n+1}{2} &= \frac{n+1}{2} \cdot (n-1+1) \\ &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \end{aligned}$$

Não é legal?

Sim, mas a gente podia ter sido um pouquinho mais esperto.

Quer dizer, se n é ímpar, então $n-1$ é par.

Daí que, a gente pode escrever a soma assim

$$(1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) + n$$

E daí, a gente pode aplicar a fórmula para o caso par na soma entre parênteses

$$\frac{(n-1)}{2} \cdot ((n-1) + 1) + n$$

E agora, é só fazer a conta pra chegar na mesma coisa outra vez ...