

O truque do triângulo

Mas, vamos olhar para a soma outra vez

1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n

Porque a gente ainda não viu tudo o que tinha pra ver.

Mas, o que é que ainda tem para ver aqui?

Bom, a gente pode ver que

- o 2 é igual a 1 + 1
- e o 3 é igual a 1 + 2
- e o 4 é igual a 1 + 3
- e por aí vai ...

Daí que, a gente pode reescrever a nossa soma assim

1 + 2 + 3 + ... + n = 1 + (1+1) + (1+2) + ... + (1 + (n-1))

E daí, a gente desmonta o lado direito assim

1 + 2 + 3 + ... + n = 1 + 1 + 1 + ... + 1 + 1 + 2 + ... + n-1

Quer dizer, a nossa soma apareceu do lado direito outra vez — (ou quase ...)

Daí, cancelando os termos iguais dos dois lados, a gente chega nisso aqui

n = 1 + 1 + 1 + ... + 1

O que é uma coisa que a gente já sabia — (ou será que não?)

Só que isso não serve para nada ...

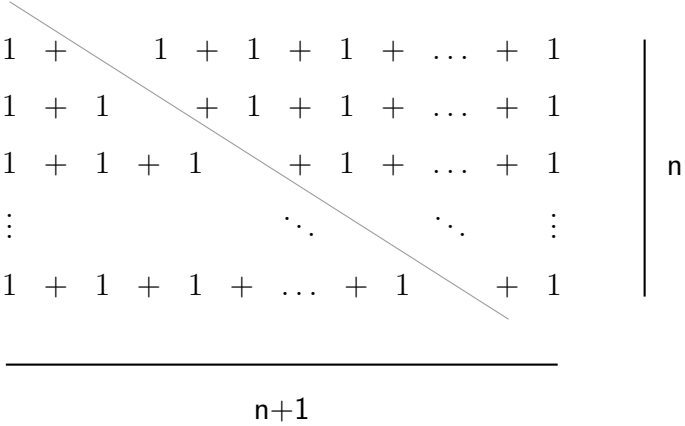
Ou será que serve?

Bom, usando isso, a gente pode reescrever a nossa soma assim

1 + 2 + 3 + ... + n = 1 + 1 + 1 + ... + 1 + 1 + 1 + ... + 1 + 1 + ... + 1 ... :

Sim, um triângulo!

E dois triângulos formam um retângulo



Um retângulo com altura n e base n + 1 contém

n · (n + 1) cópias do 1

Só que o retângulo são dois triângulos.

E o triângulo é a nossa soma.

Logo, a gente descobriu outra vez que

1 + 2 + 3 + ... + n = n · (n + 1) / 2

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, vamos olhar para a nossa soma outra vez

1 + 2 + 3 + 4 + ... + n

Só que dessa vez, a gente coloca a atenção no lado direito.

E o que é que a gente vê ali?

Bom, a gente vai vendo isso aqui

... + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n

Quer dizer, todo mundo é o n menos alguma coisa

Daí, voltando para o lado esquerdo, a gente vê que

- o 3 é igual a n menos n-3
- o 2 é igual a n menos n-2
- e o 1 é igual a n menos n-1

Daí que, a gente pode reescrever a nossa soma assim

1 + 2 + 3 + ... + n = (n-(n-1)) + (n-(n-2)) + ... + (n-1) + n

Daí, a gente desmonta o lado direito assim

1 + 2 + 3 + ... + n = n + n + ... + n + n - (n-1) - (n-2) - ... - 1

e depois a gente reescreve a coisa assim

1 + 2 + 3 + ... + n = n + n + n + ... + n - (1 + 2 + 3 + ... + (n-1))

Quer dizer, a nossa soma apareceu no lado direito outra vez — (ou quase ...)

Só que dessa vez, a soma apareceu com o sinal negativo.

Então, a gente passa ela para o outro lado

1 + 2 + 3 + ... + n = n + n + n + ... + n + (1 + 2 + 3 + ... + (n-1))

Adiciona n dos dois lados

1 + 2 + 3 + ... + n = n + n + n + ... + n + n + (1 + 2 + 3 + ... + (n-1)) + n

Reescreve a coisa assim

2 · (1 + 2 + 3 + ... + n) = n · (n + 1)

e depois assim

1 + 2 + 3 + ... + n = n · (n + 1) / 2

Legal, não é?