

O truque do peteleco

Agora considere uma soma de potências de 2

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n$$

Um truque que nem todo mundo conhece consiste em adicionar 1 a essa soma, e depois fazer as contas assim

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 1 & + & 2 & + & 4 & + & 8 & + & \dots & + & 2^n \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ = 2 & & = 4 & & = 8 & & = 16 & & = 32 & & = 64 & & = 128 \end{array}$$

Quer dizer, a cada passo, a gente obtém o próximo termo da soma.

Daí que, continuando assim até o fim, a gente chega no seguinte

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & + & 1 & + & 2 & + & 4 & + & 8 & + & \dots & + & 2^n \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ = 2 & & = 4 & & = 8 & & = 16 & & = 32 & & = 64 & & = 128 \end{array}$$

— (esse é o truque do peteleco — porque?)

Mas, isso é o resultado da soma adicionada de 1.

Logo, a soma original vale

$$2^{n+1} - 1$$

Legal, não é?

Agora a gente pode tentar aplicar o mesmo truque na soma das potências de 3

$$1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^n$$

Mas daí, a gente vê que a coisa não funciona.

Quer dizer, somar 1 não dá certo

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 1 & + & 3 & + & 9 & + & 27 & + & \dots & + & 3^n \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ = 2 & & = 4 & & = 8 & & = 16 & & = 32 & & = 64 & & = 128 \end{array}$$

E somar 2 também não dá certo

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2 & + & 1 & + & 3 & + & 9 & + & 27 & + & \dots & + & 3^n \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ = 3 & & = 6 & & = 12 & & = 24 & & = 48 & & = 96 & & = 192 \end{array}$$

E agora?

Bom, agora é a hora para uma pequena esperteza.

Quer dizer, a ideia é considerar duas cópias da soma, e daí adicionar 1

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & + & 3 & + & 9 & + & 27 & + & \dots & + & 3^n \\ + & 1 & + & 3 & + & 9 & + & 27 & + & \dots & + & 3^n \\ + & 1 & & & & & & & & & & & \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ = 3 & & = 9 & & = 27 & & = 81 & & = 243 & & = 729 & & = 2187 \end{array}$$

Mas, isso é o resultado de duas cópias da soma adicionadas de 1.

Logo a soma original vale

$$\frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

Legal.

E para fazer a coisa funcionar com essa soma aqui

$$1 + 4 + 16 + 64 + \dots + 4^n$$

a ideia é considerar 3 cópias da soma, e depois adicionar 1

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & + & 4 & + & 16 & + & 64 & + & \dots & + & 4^n \\ + & 1 & + & 4 & + & 16 & + & 64 & + & \dots & + & 4^n \\ + & 1 & + & 4 & + & 16 & + & 64 & + & \dots & + & 4^n \\ + & 1 & & & & & & & & & & & \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ = 4 & & = 16 & & = 64 & & = 256 & & = 1024 & & = 4096 & & = 16384 \end{array}$$

E assim, a gente descobre que a soma original vale

$$\frac{4^{n+1} - 1}{3}$$

Nesse ponto, a gente já entendeu o princípio da coisa.

Daí, se alguém nos dá a seguinte soma

$$1 + k + k^2 + k^3 + \dots + k^n$$

a gente já pode advinhar que isso vale

$$\frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$$

O que acontece quando k não é um número inteiro?

Você consegue adaptar o truque?