

O truque mais velho para PGs

Mas, existe um truque bem velho para calcular somas de PG.

Considere outra vez a soma

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n$$

O primeiro passo é dar um nome para a soma

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n$$

Daí, a gente multiplica os dois lados por 2

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^{n+1}$$

Fazendo isso, a gente vê que S e 2S tem quase todos os termos iguais.

Daí que, subtraindo uma coisa da outra acontece um monte de cancelamentos

$$\begin{array}{rcl} 2S & = & \cancel{2} + \cancel{4} + \cancel{8} + \cancel{16} + \dots + 2^{n+1} \\ - S & = & 1 + \cancel{2} + \cancel{4} + \cancel{8} + \dots + \cancel{2^n} \\ \hline 2S - S & = & 2^{n+1} - 1 \end{array}$$

Só que $2S - S$ é igual a S.

Logo

$$S = 2^{n+1} - 1$$

— (o que é uma coisa que a gente já sabia ...)

É bem fácil ver que o truque também funciona com a soma de potências de 3

$$1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^n$$

Só que dessa vez, a ideia é multiplicar a soma por 3 e depois subtrair

$$\begin{array}{rcl} 3S & = & \cancel{3} + \cancel{9} + \cancel{27} + \cancel{81} + \dots + 3^{n+1} \\ - S & = & 1 + \cancel{3} + \cancel{9} + \cancel{27} + \dots + \cancel{3^n} \\ \hline 3S - S & = & 3^{n+1} - 1 \end{array}$$

Fazendo isso, a gente descobre que

$$1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

E o truque também funciona com a PG de razão 2/3

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots + \frac{2^n}{3^n}$$

Quer dizer, primeiro a gente dá um nome para a soma

$$S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots + \frac{2^n}{3^n}$$

Daí, a gente multiplica os dois lados por 2/3

$$\frac{2}{3} \cdot S = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \dots + \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}$$

E daí, subtraindo uma coisa da outra, a gente obtém

$$S - \frac{2}{3} \cdot S = 1 - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}$$

o que nos dá

$$S = 3 - \frac{2^{n+1}}{3^n}$$

Legal, não é?