

Uma soma diferente

Considere a seguinte soma

S = 1 · 2 + 2 · 2^2 + 3 · 2^3 + 4 · 2^4 + ... + n · 2^n

Isso não é uma soma de PA, e nem é uma soma de PG.

Mas, nada nos impede de tentar o nosso truque outra vez.

Quer dizer, nós multiplicamos a coisa toda por 2 e depois subtraímos S

2S - S = 1 · 2^2 + 2 · 2^3 + 3 · 2^4 + 4 · 2^5 + ... + n · 2^{n+1} - 1 · 2 - 2 · 2^2 - 3 · 2^3 - 4 · 2^4 - ... - n · 2^n

Só que dessa vez, não surgiu nenhuma oportunidade de cancelamento.

E agora?

Bom, agora é a hora para uma pequena esperteza.

Quer dizer, a ideia é escrever a subtração assim

2S - S = 1 · 2^2 + 2 · 2^3 + 3 · 2^4 + ... + (n - 1) · 2^n + n · 2^{n+1} - 1 · 2 - 2 · 2^2 - 3 · 2^3 - 4 · 2^4 - ... - n · 2^n

Dai, fazendo a conta por colunas, nós chegamos a

- 1 · 2 - 2^2 - 2^3 - 2^4 - ... - 2^n + n · 2^{n+1}

o que a gente também pode escrever assim

n · 2^{n+1} - (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n)

Ali dentro dos parênteses tem uma soma de PG.

E nós já sabemos como calcular essa soma para obter

2^{n+1} - 2

Dai que, a coisa toda vale

n · 2^{n+1} - 2^{n+1} + 2

o que a gente também pode escrever assim

(n - 1) · 2^{n+1} + 2

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, olhando para a soma outra vez

S = 1 · 2 + 2 · 2^2 + 3 · 2^3 + 4 · 2^4 + ... + n · 2^n

a gente observa que ela também pode ser escrita assim

S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n + 2^4 + ... + 2^n ... + 2^n

onde cada linha é uma soma de PG.

Mas, soma de PG é uma coisa que a gente já sabe resolver

Dai que, a gente pode calcular o valor de cada linha em separado

S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n -> 2^{n+1} - 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n -> 2^{n+1} - 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n -> 2^{n+1} - 2^3 + 2^4 + ... + 2^n -> 2^{n+1} - 2^4 ... -> ... + 2^n -> 2^{n+1} - 2^n

O próximo passo é escrever a soma de resultados assim

n · 2^{n+1} - (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n)

calcular a soma de PG dentro dos parênteses

n · 2^{n+1} - 2^{n+1} + 2

e chegar outra vez a

(n - 1) · 2^{n+1} + 2

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, olhe mais uma vez para essa soma

S = 1 · 2 + 2 · 2^2 + 3 · 2^3 + 4 · 2^4 + ... + n · 2^n

Agora, você consegue encontrar a soma dentro da soma?