

Uma esperteza recursiva

Depois de ter aprendido tanta coisa, a gente pode olhar outra vez para isso aqui

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

Só que dessa vez, a gente vai fazer as coisas de um jeito diferente.

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

onde o nome diz quantos termos a soma tem.

Daí, a gente assume que n é par, e reescreve a coisa assim

$$S_n = 1 + 2 + \dots + \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} + 1\right) + \left(\frac{n}{2} + 2\right) + \dots + n$$

E daí, a esperteza é subtrair $n/2$ dos termos da segunda metade

$$1 + 2 + \dots + \frac{n}{2} + \overbrace{\left(\cancel{\frac{n}{2}} + 1\right) + \left(\cancel{\frac{n}{2}} + 2\right) + \dots + \cancel{n}}^{\begin{array}{c} 1 + 2 + 3 + \dots + \frac{n}{2} \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \frac{n}{2} \quad + \quad \frac{n}{2} \quad + \dots + \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} \text{ termos} \end{array}}$$

Quer dizer, embaixo apareceu um monte de termos $n/2$.

E em cima apareceu outra cópia da primeira metade.

Mas, a primeira metade é a soma $S_{\frac{n}{2}}$.

Então, a gente pode reescrever a coisa assim

$$S_n = 2 \cdot S_{\frac{n}{2}} + \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

Legal.

Só que, $S_{\frac{n}{2}}$ é basicamente a mesma coisa que S_n .

Então, se $n/2$ for par, a gente pode fazer a mesma coisa outra vez

$$S_{\frac{n}{2}} = 1 + 2 + \dots + \frac{n}{4} + \overbrace{\left(\cancel{\frac{n}{4}} + 1\right) + \left(\cancel{\frac{n}{4}} + 2\right) + \dots + \cancel{\frac{n}{2}}}^{\begin{array}{c} 1 + 2 + 3 + \dots + \frac{n}{4} \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \frac{n}{4} \quad + \quad \frac{n}{4} \quad + \dots + \frac{n}{4} \\ \frac{n}{4} \text{ termos} \end{array}}$$

E daí, a gente descobre que

$$S_{\frac{n}{2}} = 2 \cdot S_{\frac{n}{4}} + \left(\frac{n}{4}\right)^2$$

Substituindo essa expressão na equação acima, a gente obtém

$$\begin{aligned} S_n &= 2 \cdot \left[2 \cdot S_{\frac{n}{4}} + \left(\frac{n}{4}\right)^2 \right] + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \\ &= 4 \cdot S_{\frac{n}{4}} + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{8} \end{aligned}$$

Nesse ponto, a gente já pode advinhar que

$$S_{\frac{n}{4}} = 2 \cdot S_{\frac{n}{8}} + \left(\frac{n}{8}\right)^2$$

— (*se $n/4$ for par ...*)

De modo que

$$\begin{aligned} S_n &= 2 \cdot \left[2 \cdot S_{\frac{n}{8}} + \left(\frac{n}{8}\right)^2 \right] + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{8} \\ &= 8 \cdot S_{\frac{n}{8}} + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^2}{16} \end{aligned}$$

E a gente pode continuar fazendo isso até chegar em

$$S_{\frac{n}{n}} = S_1 = 1$$

— (*se n for uma potência de 2 ...*)

Então, escrevendo $n = 2^k$, a gente obtém o seguinte

$$S_n = 2^k \cdot S_{\frac{n}{2^k}} + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^2}{16} + \dots + \frac{n^2}{2^{k+1}}$$

o que a gente reescreve assim

$$S_n = 2^k + \frac{n^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k} \right)$$

Quer dizer, apareceu uma soma de PG dentro dos parênteses, que a gente resolve assim

$$\underbrace{\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-2}} + \frac{1}{2^{k-3}} + \dots + \frac{1}{2}}_{= \frac{1}{2^{k-1}}} = \underbrace{\frac{1}{2^{k-2}} + \frac{1}{2^{k-2}} + \frac{1}{2^{k-3}} + \frac{1}{2^{k-4}} + \dots + \frac{1}{2^{k-3}}}_{= \frac{1}{2^{k-3}}} = \underbrace{\frac{1}{2^{k-3}} + \frac{1}{2^{k-3}} + \frac{1}{2^{k-4}} + \frac{1}{2^{k-5}} + \dots + \frac{1}{2^{k-4}}}_{= \frac{1}{2^{k-4}}} = \dots = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{= 1}$$

Quer dizer, a soma vale

$$1 - \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{n}$$

Daí, substituindo esse resultado na expressão original, nós obtemos

$$S_n = \frac{n^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) + n$$

o que a gente reescreve assim

$$S_n = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + n$$

e depois assim

$$S_n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

e depois assim

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

o que a gente já sabia desde o início ...