

Matemática Discreta

aula 02: Raciocinando sobre quadrados

1 Introdução

Nós vamos começar a aula de hoje com a seguinte pergunta

- *O que é o 4^2 ?*

Algumas pessoas gostam de responder essa pergunta assim: “*isso é 16*”.

Sim, é verdade ...

Mas assim, nós só tiramos a coisa de uma caixa para colocá-la dentro de outra caixa.

Para ver realmente o que é o 4^2 , nós fazemos o seguinte

$$\begin{array}{ccccccc} 4^2 & = & 4 \times 4 & = & 4 + 4 + 4 + 4 & = & 1 + 1 + 1 + 1 \\ & & & & & & 1 + 1 + 1 + 1 \\ & & & & & & 1 + 1 + 1 + 1 \\ & & & & & & 1 + 1 + 1 + 1 \end{array}$$

Sim! o 4^2 é um quadrado — (*como todo mundo sabe ...*)

E agora que nós vimos que 4^2 é um quadrado, nós podemos fazer algumas coisas legais com ele.

Por exemplo, nós podemos ver que dentro desse quadrado tem um outro quadrado

$$\begin{array}{c} 4^2 = \begin{array}{c} 1 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 \end{array} \\ \quad \quad \quad 3^2 \end{array}$$

E daí, claro, dentro desse outro quadrado nós podemos encontrar mais um quadrado

— (*e assim por diante ...*)

Quer dizer, um quadrado é como uma cebola.

E a gente pode ir descascando essa cebola até que não sobre mais nada

— (*porque uma cebola não tem caroço ...*)

Dáí, prestando atenção nas cascas que a gente foi tirando, nós descobrimos mais uma coisa legal

$$\begin{array}{c} 4^2 = \begin{array}{c} \overline{1 + 1 + 1 + 1} \\ \overline{1 + 1 + 1 + 1} \\ \overline{1 + 1 + 1 + 1} \\ \overline{1 + 1 + 1 + 1} \end{array} \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ 1 \quad + \quad 3 \quad + \quad 5 \quad + \quad 7 \end{array}$$

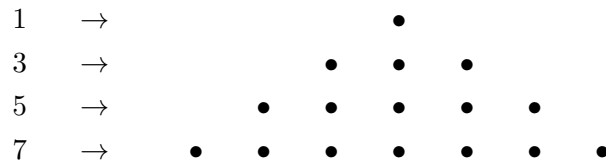
Sim! um quadrado é uma soma de números ímpares.

— (*Você consegue ver que isso também vale para 5^2 e 6^2 — e para os outros quadrados também?*)

Mas, e agora?

Bom, muitas coisas!

Uma delas é que a soma de números ímpares é um triângulo



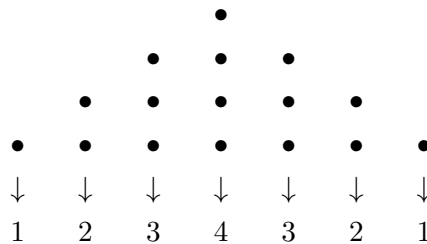
Quer dizer, agora nós acabamos de descobrir que todo quadrado é um triângulo também.

Legal!

Mas, e esse triângulo, o que é?

Ah, isso depende de como você olha ...

Porque se você olha de um jeito diferente, vai parecer que ele é outra coisa



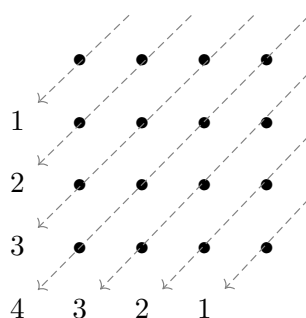
Pronto.

Agora nós descobrimos que um quadrado também é uma escadinha que sobe e desce

$$4^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$$

— (*E isso também vale para qualquer outro quadrado — você consegue ver?*)

Na verdade, já dava pra ver que um quadrado é uma escadinha olhando desse jeito aqui



2 Somas de quadrados

Nós acabamos de ver que um quadrado é uma coisa bem legal.

Mas, o que é ainda mais legal do que um quadrado?

A resposta é: *um monte de quadrados!*

E é com isso que nós vamos nos divertir agora.

Considere a soma de quadrados

$$Q_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$$

Quanto é isso?

Sei lá!

Mas a gente pode desmontar os quadrados assim

$$\begin{array}{ccccccccccc} Q_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \\ & & & & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \\ & & & & & & + & 3 & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \\ & & & & & & & & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \\ & & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & & + & n \end{array}$$

Agora nós temos um triângulo.

E agora?

Bom, agora, a gente pode calcular as linhas do triângulo.

Quer dizer, a gente já sabe que

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

E para calcular a soma

$$2 + 3 + 4 + \dots + n$$

a gente utiliza a fórmula

$$\text{número de elementos} \times \frac{(1^\circ \text{ elemento} + \text{último elemento})}{2}$$

o que dá

$$2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{(n-1) \cdot (n+2)}{2}$$

Fazendo isso para todas as linhas, a gente obtém

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n & \longrightarrow & \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\
& & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n & \longrightarrow & \frac{(n-1) \cdot (n+2)}{2} \\
& & & & + & 3 & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n & \longrightarrow & \frac{(n-2) \cdot (n+3)}{2} \\
& & & & & & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n & \longrightarrow & \frac{(n-3) \cdot (n+4)}{2} \\
& & & & & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots & & \\
& & & & & & & & & & & + & n & \longrightarrow & \frac{(n-(n-1)) \cdot (n+n)}{2}
\end{array}$$

O próximo passo é somar a última coluna

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{(n-1) \cdot (n+2)}{2} + \frac{(n-2) \cdot (n+3)}{2} + \dots + \frac{(n-(n-1)) \cdot (n+n)}{2}$$

o que a gente reescreve assim

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\begin{array}{cccccccc}
n^2 & + & n^2 & + & n^2 & + & n^2 & + & \dots & + & n^2 \\
n & + & n & + & n & + & n & + & \dots & + & n \\
- & 1 \cdot 2 & - & 2 \cdot 3 & - & 3 \cdot 4 & - & \dots & - & (n-1) \cdot n
\end{array} \right)$$

e depois assim

$$\frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1) \cdot n)$$

Agora, é a hora para um pequeno truque sujo.

Quer dizer, a ideia é desmontar a soma dentro dos parênteses assim

$$\begin{array}{cccccccc}
1 \cdot 2 & + & 2 \cdot 3 & + & 3 \cdot 4 & + & \dots & + & (n-1) \cdot n \\
= & 1^2 & + & 2^2 & + & 3^2 & + & \dots & + & (n-1)^2 & + \\
& 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1)
\end{array}$$

Sim! a gente encontrou o Q_n dentro do Q_n — (ou quase ...)

Agora, a gente pode reescrever a coisa assim

$$Q_n = \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(Q_n - n^2 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \right)$$

e depois assim

$$Q_n = \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot Q_n + \frac{n^2}{2} - \frac{(n-1) \cdot n}{4}$$

e depois assim

$$\frac{3 Q_n}{2} = \frac{n^3}{2} + \frac{3 n^2}{4} - \frac{n}{4}$$

e depois assim

$$Q_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6}$$

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, olhe mais uma vez para o triângulo

$$\begin{array}{cccccccccc} Q_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \\ & & & & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \\ & & & & & & + & 3 & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \\ & & & & & & & & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \\ & & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & & + & n \end{array}$$

E note que as linhas são todas muito parecidas.

Daí que, a gente pode completar as linhas para que elas fiquem iguais

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \\ \hline 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \\ \hline 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \\ \hline 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \\ \hline & \dots & & \dots & & \dots & & & & & & \dots \\ \hline 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \end{array}$$

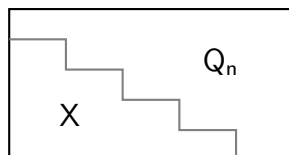
Pronto.

Agora nós temos um retângulo.

E é bem fácil ver que esse retângulo vale

$$n \cdot \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Por outro lado, a gente também pode olhar para o retângulo assim



E daí, a gente pode escrever

$$X + Q_n = \frac{n^2 \cdot (n+1)}{2}$$

Agora, se a gente descobrir o valor de X , então a gente descobre quanto vale o Q_n .

Certo.

Então o nosso problema é calcular

$$\begin{aligned} X = & \quad 1 \\ & + \quad 1 \quad + \quad 2 \\ & + \quad 1 \quad + \quad 2 \quad + \quad 3 \\ & + \quad 1 \quad + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \quad 4 \\ & \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad \quad \ddots \quad \ddots \\ & + \quad 1 \quad + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \quad 4 \quad + \quad \dots \quad \dots \quad + \quad n-1 \end{aligned}$$

Ora, mas a gente sabe calcular o valor de cada linha

$$\begin{array}{llll} X = & 1 & \longrightarrow & \frac{1^2+1}{2} \\ & + \quad 1 \quad + \quad 2 & \longrightarrow & \frac{2^2+2}{2} \\ & + \quad 1 \quad + \quad 2 \quad + \quad 3 & \longrightarrow & \frac{3^2+3}{2} \\ & + \quad 1 \quad + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \quad 4 & \longrightarrow & \frac{4^2+4}{2} \\ & \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad \quad \ddots \quad \ddots & & \vdots \\ & + \quad 1 \quad + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad + \quad 4 \quad + \quad \dots \quad \dots \quad + \quad n-1 & \longrightarrow & \frac{(n-1)^2+(n-1)}{2} \end{array}$$

E agora, somando a última coluna a gente obtém

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2) + \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (Q_n - n^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot Q_n - \frac{n(n+1)}{4} \end{aligned}$$

Sim! a gente encontrou o Q_n dentro do X .

Daí que, a gente pode reescrever a nossa equação assim

$$\frac{1}{2} \cdot Q_n - \frac{n(n+1)}{4} + Q_n = \frac{n^2 \cdot (n+1)}{2}$$

e depois assim

$$\frac{3}{2} \cdot Q_n = \frac{n^2 \cdot (n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{4}$$

e depois para

$$3 \cdot Q_n = \frac{2n^2 \cdot (n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

e depois para

$$Q_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

o que é a mesma coisa que

$$Q_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6}$$

Legal, não é?

Sim, mas existem muitas outras maneiras de calcular a soma de quadrados.

Exemplos

a. O argumento da pirâmide¹

Agora, a gente lembra que um quadrado também é uma soma de números ímpares.

Daí, a gente desmonta a soma de quadrados assim

$$\begin{array}{ccccccccccc} Q_n = & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & \dots & \dots & + & 1 \\ & & & + & 3 & + & 3 & + & 3 & + & \dots & \dots & + & 3 \\ & & & & & + & 5 & + & 5 & + & \dots & \dots & + & 5 \\ & & & & & & + & 7 & + & \dots & \dots & + & 7 \\ & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & + & 2n-1 \end{array}$$

O próximo passo é somar as linhas do triângulo

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & \dots & \dots & + & 1 & \longrightarrow & n \cdot 1 \\ & & + & 3 & + & 3 & + & 3 & + & \dots & \dots & + & 3 & \longrightarrow & (n-1) \cdot 3 \\ & & & & + & 5 & + & 5 & + & \dots & \dots & + & 5 & \longrightarrow & (n-2) \cdot 5 \\ & & & & & + & 7 & + & \dots & \dots & + & 7 & \longrightarrow & (n-3) \cdot 7 \\ & & & & & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots & \\ & & & & & & & & & & & + & 2n-1 & \longrightarrow & (n-(n-1)) \cdot (2n-1) \end{array}$$

E daí, a gente soma a última coluna para obter o seguinte

$$\begin{aligned} Q_n = & n \cdot 1 + n \cdot 3 + n \cdot 5 + n \cdot 7 + \dots + n \cdot (2n-1) \\ & - 1 \cdot 3 - 2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 - \dots - (n-1) \cdot (2n-1) \end{aligned}$$

o que a gente reescreve assim

$$\begin{aligned} Q_n = & n \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)) \\ & - (1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + (n-1) \cdot (2n-1)) \end{aligned}$$

¹Luis Gustavo, em 2022.1

e depois assim

$$Q_n = n^3 - \left(1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + (n-1) \cdot (2n-1) \right)$$

Daí, a gente desmonta a soma entre parênteses, para ver uma coisa legal

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 + 2 \\ 3 + 3 + 3 \\ \vdots \\ n-1 + n-1 + n-1 \end{array} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n-1 \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 + 2 \\ 3 + 3 + 3 \\ \vdots \\ n-1 + n-1 + n-1 \end{array} \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} Q_n - n^2 \qquad \qquad \qquad \downarrow \frac{n \cdot (n-1)}{2} \qquad \qquad \qquad Q_n - n^2 \\
 \end{array}
 \end{array}$$

Quer dizer, nós acabamos de descobrir que

$$Q_n = n^3 - \left(Q_n - n^2 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} + Q_n - n^2 \right)$$

o que a gente reescreve assim

$$3Q_n = n^3 + 2n^2 - \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

e depois assim

$$Q_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

e depois assim

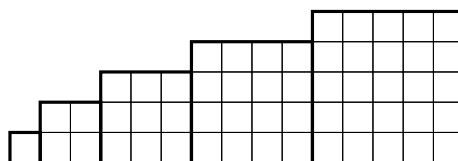
$$Q_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

◇

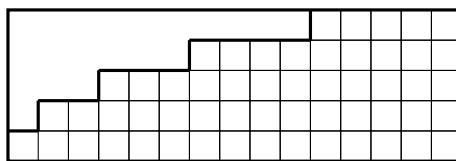
b. Empilhando retângulos

Dessa vez, a gente lembra que um quadrado também é um quadrado.

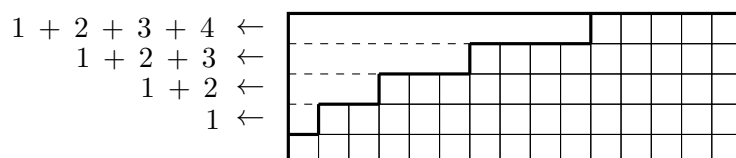
Daí, a gente desmonta o Q_n assim



O próximo passo é traçar o contorno



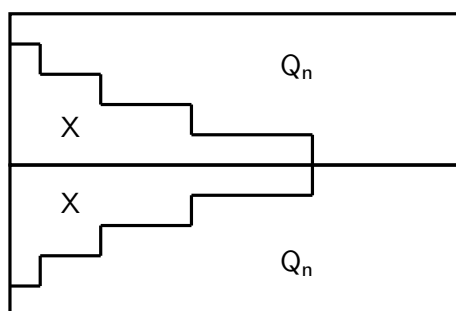
E nesse ponto, a gente reconhece o X outra vez



Só que o X é quase a metade de um Q_n

$$X = \frac{Q_n}{2} - \frac{n(n+1)}{4}$$

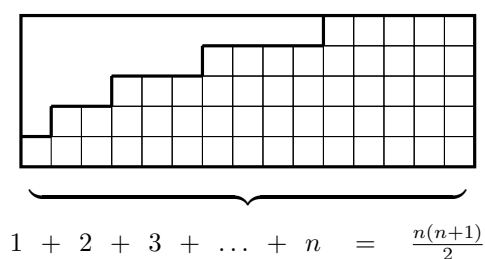
Daí, a esperteza aqui é empilhar duas cópias do retângulo



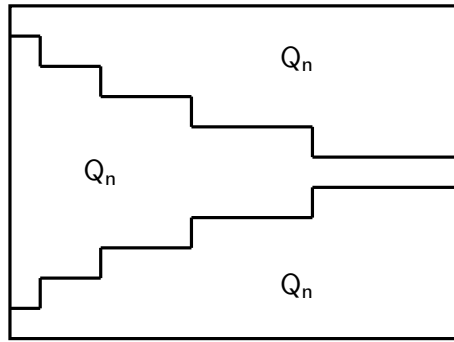
Porque duas vezes o X é quase igual a um Q_n

$$2X = Q_n - \frac{n(n+1)}{2}$$

E aquilo que falta, é exatamente a base do nosso retângulo



Daí que, se a gente adicionar mais uma linha ao desenho, a gente obtém 3 Q_n 's



Legal, não é?

Por outro lado, esse retângulo tem

- base: $n(n+1)/2$

- e altura: $2n+1$

Daí que,

$$3Q_n = (2n+1) \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

donde

$$Q_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

— (o que a gente já sabia ...)

◇

c. O truque da PA

Todo mundo sabe que a gente calcula a soma de 1 a n assim

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & \dots & \dots & + & n-1 & + & n \\ + & & n & + & n-1 & + & \dots & \dots & + & 2 & + & 1 \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

E agora, a gente vai aplicar o truque da PA para calcular a soma dos quadrados.

Porque o Q_n é um monte de PA's

$$\begin{array}{ccccccccccc} Q_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \\ & & & & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \\ & & & & & & + & 3 & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \\ & & & & & & & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \\ & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & + & n \end{array}$$

O primeiro passo é virar o Q_n ao contrário

$$\begin{array}{rcl}
 Q_n & = & n + n-1 + n-2 + n-3 + \dots \dots + 1 \\
 & & + n + n-1 + n-2 + \dots \dots + 2 \\
 & & + n + n-1 + \dots \dots + 3 \\
 & & + n + \dots \dots + 4 \\
 & & \vdots \\
 & & + n
 \end{array}$$

E daí, somando as duas cópias nós obtemos o seguinte

$$\begin{array}{rcl}
 2Q_n & = & n+1 + n+1 + n+1 + n+1 + \dots \dots + n+1 \\
 & & + n+2 + n+2 + n+2 + \dots \dots + n+2 \\
 & & + n+3 + n+3 + \dots \dots + n+3 \\
 & & + n+4 + \dots \dots + n+4 \\
 & & \vdots \\
 & & + 2n
 \end{array}$$

Isso é um padrão repetitivo legal.

Só que não é bem o que a gente queria.

Quer dizer, não ficou tudo igual.

Mas, nós podemos colocar mais um Q_n para ver o que acontece.

Para isso, é preciso virar o Q_n ao contrário outra vez — (*colocando ele de cabeça para baixo*)

$$\begin{array}{rcl}
 Q_n & = & n + n + n + n + \dots \dots + n \\
 & & + n-1 + n-1 + n-1 + \dots \dots + n-1 \\
 & & + n-2 + n-2 + \dots \dots + n-2 \\
 & & + n-3 + \dots \dots + n-3 \\
 & & \vdots \\
 & & + 1
 \end{array}$$

Agora já não é difícil ver que a soma dos 3 Q_n 's vai dar

$$\begin{array}{rcl}
 3Q_n & = & 2n+1 + 2n+1 + 2n+1 + 2n+1 + \dots \dots + 2n+1 \\
 & & + 2n+1 + 2n+1 + 2n+1 + \dots \dots + 2n+1 \\
 & & + 2n+1 + 2n+1 + \dots \dots + 2n+1 \\
 & & + 2n+1 + \dots \dots + 2n+1 \\
 & & \vdots \\
 & & + 2n+1
 \end{array}$$

Um triângulo de $(2n+1)$'s!

Daí que,

$$3Q_n = (2n+1) \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

de modo que

$$Q_n = \frac{(2n+1) \cdot n \cdot (n+1)}{6}$$

Legal, não é?

◇

d. O truque mais velho do mundo

Um dia, alguém notou que

$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$

Quer dizer, a diferença de dois cubos consecutivos produz um termo quadrado.

Daí, o próximo passo foi escrever

$$(n-1)^3 - (n-2)^3 = 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1$$

E aqui, nós obtemos um termo com o quadrado anterior.

Quer dizer, a ideia é que nós podemos obter todos os quadrados assim.

E então, basta fazer a soma

$$\begin{array}{rcl} 1^3 - 0^3 & = & 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 \\ 2^3 - 1^3 & = & 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 \\ 3^3 - 2^3 & = & 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 \\ \dots & & \dots \\ + n^3 - (n-1)^3 & = & 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1 \end{array}$$

Mas, quando a gente faz isso, os cubos desaparecem todos — (*com a exceção do último ...*)

E a gente obtém o seguinte

$$\begin{aligned} n^3 &= 3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2) \\ &\quad - 3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) \\ &\quad + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \end{aligned}$$

o que a gente reescreve assim

$$n^3 = 3Q_n - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

e depois assim

$$3Q_n = n^3 + \frac{3n^2}{2} + \frac{3n}{2} - n$$

e depois assim

$$Q_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

Legal, não é?

Sim, mas o mais legal é que o truque também pode ser usado para calcular a soma de cubos.

Quer dizer, a ideia é somar as equações

$$\begin{array}{rcll} 1^4 - 0^4 & = & 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1 - 1 \\ 2^4 - 1^4 & = & 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2 - 1 \\ 3^4 - 2^4 & = & 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3 - 1 \\ \dots & & \dots & \dots \\ + n^4 - (n-1)^4 & = & 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot n^3 + 4 \cdot n - 1 \end{array}$$

Daí, a gente obtém o seguinte

$$\begin{aligned} n^3 &= 4 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3) \\ &- 6 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2) \\ &+ 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) \\ &- 1 - 1 - 1 - 1 - \dots - 1 \end{aligned}$$

o que a gente reescreve assim

$$n^4 = 4C_n - 6Q_n + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n$$

e depois assim

$$4C_n = n^4 + 6Q_n - 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

e depois assim

$$4C_n = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + n - 2n^2 - 2n + n$$

e depois assim

$$4C_n = n^4 + 2n^3 + n^2$$

e depois assim

$$4C_n = n^2 \cdot (n^2 + 2n + 1)$$

e depois assim

$$4C_n = n^2 \cdot (n+1)^2$$

e depois assim

$$C_n = \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right]^2$$

Legal, não é?

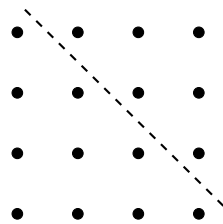
◇

e. Soma de triângulos

Aqui, a gente começa observando o seguinte

$$Q_n = Q_{n-1} + n^2$$

Só que um quadrado é a mesma coisa que dois triângulos



Daí que, a gente pode reescrever a nossa equação assim

$$Q_n = Q_{n-1} + t_n + t_{n-1}$$

Mas, se dentro do Q_n tem um Q_{n-1} .

Então, dentro do Q_{n-1} tem um Q_{n-2} .

Quer dizer, o Q_n também é como uma cebola — (*ou um rocambole ...*)

Desenrolando esse rocambole com cuidado, nós obtemos

$$\begin{aligned} Q_n &= Q_{n-1} + (t_n + t_{n-1}) \\ &= Q_{n-2} + (t_{n-1} + t_{n-2}) + (t_n + t_{n-1}) \\ &= Q_{n-3} + (t_{n-2} + t_{n-3}) + (t_{n-1} + t_{n-2}) + (t_n + t_{n-1}) \end{aligned}$$

e assim por diante ...

Um rocambole, como a cebola, também não tem um caroço.

Daí que, desenrolando até o final, a gente obtém o seguinte

$$Q_n = (t_n + t_{n-1}) + (t_{n-1} + t_{n-2}) + \dots + (t_1 + t_0)$$

A esperteza agora consiste em olhar para o lado direito, e ver que falta pouco para que ali tenham duas somas de triângulos.

Quer dizer, só falta um t_n .

Então, somando t_n dos dois lados, nós podemos escrever a coisa assim

$$Q_n + t_n = 2 \times (t_1 + t_2 + \dots + t_n)$$

de modo que

$$t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n = \frac{Q_n + t_n}{2}$$

Você não acha isso estranhamente parecido com

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n^2 + n}{2} ?$$

— (*porque?*)

◇

f. Argumento recursivo

Suponha dessa vez que n é uma potência de 2.

Daí, a gente escreve o Q_n assim

$$Q_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$$

E separa os termos pares e ímpares

$$\begin{aligned} Q_n &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (n-1)^2 \\ &\quad + 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + n^2 \end{aligned}$$

Trabalhando sobre os termos pares primeiro, a gente observa que eles podem ser reescritos assim

$$(2 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3)^2 + \dots + \left(2 \cdot \frac{n}{2}\right)^2$$

e depois assim

$$4 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n/2)^2\right) = 4 \cdot Q_{\frac{n}{2}}$$

Certo.

Daí, a gente lembra que um quadrado é uma soma de ímpares.

Logo, um quadrado ímpar é igual a um quadrado par menos um ímpar.

E a gente pode escrever

$$\begin{aligned} &1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (n-1)^2 \\ &= 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + n^2 \\ &\quad - 3 - 7 - 11 - \dots - (2n-1) \end{aligned}$$

e depois reescrever assim

$$4 \cdot Q_{\frac{n}{2}} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

Daí que, somando pares e ímpares, a gente obtém o seguinte

$$Q_n = 8 \cdot Q_{\frac{n}{2}} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

Legal.

A ideia, claro, é que a gente pode fazer a mesma coisa com o $Q_{\frac{n}{2}}$

$$\begin{aligned} Q_{\frac{n}{2}} &= 8 \cdot Q_{\frac{n}{4}} - \frac{(n/2)^2}{2} - \frac{(n/2)}{2} \\ &= 8 \cdot Q_{\frac{n}{4}} - \frac{n^2}{8} - \frac{n}{4} \end{aligned}$$

Daí que,

$$\begin{aligned} Q_n &= 8 \cdot Q_{\frac{n}{2}} - \frac{n^2}{2} \\ &= 8 \cdot \left[8 \cdot Q_{\frac{n}{4}} - \frac{n^2}{8} \right] - \frac{n^2}{2} \\ &= 8^2 \cdot Q_{\frac{n}{4}} - n^2 - \frac{n^2}{2} \\ &\quad - 2n - \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Nesse ponto, a gente já pode advinhar que

$$\begin{aligned} Q_n &= 8^3 \cdot Q_{\frac{n}{8}} - 2n^2 - n^2 - \frac{n^2}{2} \\ &\quad - 8n - 2n - \frac{n}{2} \end{aligned}$$

o que a gente reescreve assim

$$\begin{aligned} Q_n &= 8^3 \cdot Q_{\frac{n}{2^3}} - 2^2 \cdot \frac{n^2}{2} - 2 \cdot \frac{n^2}{2} - 1 \cdot \frac{n^2}{2} \\ &\quad - 4^2 \cdot \frac{n}{2} - 4 \cdot \frac{n}{2} - 1 \cdot \frac{n}{2} \end{aligned}$$

e depois assim

$$\begin{aligned} Q_n &= 8^3 \cdot Q_{\frac{n}{2^3}} - \frac{n^2}{2} \cdot (1 + 2 + 2^2) \\ &\quad - \frac{n}{2} \cdot (1 + 4 + 4^2) \end{aligned}$$

Nesse ponto, a gente assume que $n = 2^k$.

Daí que,

$$\begin{aligned} Q_n &= 8^k \cdot Q_{\frac{n}{2^k}} - \frac{n^2}{2} \cdot (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1}) \\ &\quad - \frac{n}{2} \cdot (1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{k-1}) \end{aligned}$$

o que a gente reescreve assim

$$Q_n = (2^3)^k - \frac{n^2}{2} \cdot (2^k - 1) - \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{4^k - 1}{3} \right)$$

e depois assim

$$Q_n = n^3 - \frac{n^2}{2} \cdot (n - 1) - \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n^2 - 1}{3} \right)$$

e depois assim

$$Q_n = n^3 - \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{6}$$

e depois assim

$$Q_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

— (*o que é uma coisa que a gente já sabia ...*)