

Matemática Discreta

lista de exercícios 02

1. Escadinhas

Quanto é uma escadinha de números ímpares?

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + \dots + 5 + 3 + 1$$

E se a escadinha sobe e desce pulando de 3 em 3

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) + \dots + 7 + 4 + 1$$

Quanto é que isso dá?

2. Somas com quadrados

Calcule as somas abaixo

a) Quadrados ímpares

$$Q_n^i = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots \dots + (2n-1)^2$$

Dica: Não calcule essa soma.

b) Soma alternada

$$Q_n^A = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots \dots + n^2$$

— (note que n é ímpar)

Dica: Não calcule essa também.

3. Quanto é?

a) *Você consegue calcular essa soma?*

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1)$$

b) *E essa aqui, você consegue calcular?*

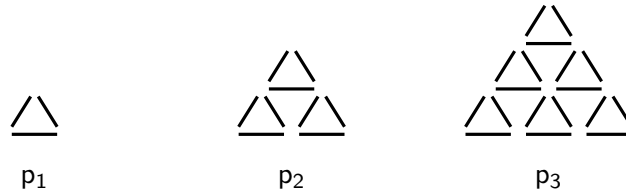
$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (2n-1)(2n)$$

c) *Aqui tem mais uma*

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + n \cdot (n+2)$$

4. Contando palitos

Considere a sequência de figuras construídas com palitos



- a) Determine o valor de p_n .
- b) E depois calcule a soma

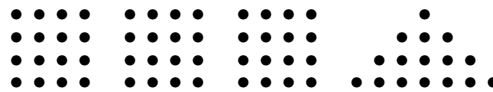
$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$$

5. O que é um cubo?

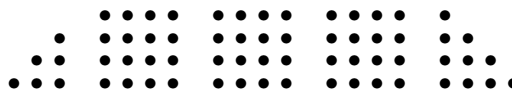
Bom, um cubo são vários quadrados um ao lado do outro

$$4^3 = 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2$$

Mas, um quadrado também é um triângulo



E quebrando o triângulo em dois e reorganizando as coisas, nós chegamos nisso aqui



Quer dizer, nós descobrimos que um cubo é um *trapézio*.

Agora, utilize essa ideia para calcular a soma de cubos

$$C_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

6. Soma de quadrados de Fibonacci

Você consegue calcular essa soma?

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + \dots + F_n^2$$

Dica: Talvez você ache mais fácil calcular essa soma primeiro

$$F_1 \cdot F_2 + F_2 \cdot F_3 + F_3 \cdot F_4 + F_4 \cdot F_5 + \dots + F_n \cdot F_{n+1}$$

7. Quebra-cabeça

Lembre que um quadrado também é um quadrado

$$4^2 = \begin{matrix} 1 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 \end{matrix}$$

Daí que, a gente pode ver o Q_n assim

$$Q_5 = \begin{array}{c} \square \\ + \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\ + \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\ + \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\ + \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Daí, a gente pode empilhar os quadrados para obter o seguinte

$$Q_5 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

— (*you viu o que aconteceu?*)

Bom, isso é um padrão repetitivo bem legal.

Quer dizer, ele parece uma PA na forma de quadrado ...

Mas então, nós podemos aplicar o truque da PA sobre ele — (*invertir e somar ...*)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ \hline 5 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 5 & 4 \\ \hline 3 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$$

Aqui apareceu outro padrão repetitivo legal.

Daí, nós fazemos uma outra inversão, e somamos outra vez

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ \hline 5 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 5 & 4 \\ \hline 3 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 5 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ \hline 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ \hline 8 & 10 & 10 & 10 & 8 \\ \hline 8 & 10 & 12 & 10 & 8 \\ \hline 8 & 10 & 10 & 10 & 8 \\ \hline 8 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Bom, não ficou tudo igual.

Mas, você consegue calcular o valor de Q_n utilizando essa ideia?