

O truque do triângulo

Nós acabamos de ver que um quadrado é uma coisa bem legal.

Mas, o que é ainda mais legal do que um quadrado?

A resposta é: *um monte de quadrados!*

E é com isso que nós vamos nos divertir agora.

Considere a soma de quadrados

Q_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2

Quanto é isso?

Sei lá!

Mas a gente pode desmontar os quadrados assim

Q_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n
+ 2 + 3 + 4 + ... + n
+ 3 + 4 + ... + n
+ 4 + ... + n
...
+ n

Agora nós temos um triângulo.

E agora?

Bom, agora, a gente pode calcular as linhas do triângulo.

Quer dizer, a gente já sabe que

1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = n(n+1)/2

E para calcular a soma

2 + 3 + 4 + ... + n

a gente utiliza a fórmula

numero de elementos x (1o elemento + ultimo elemento) / 2

o que dá

2 + 3 + 4 + ... + n = (n-1) * (n+2) / 2

Fazendo isso para todas as linhas, a gente obtém

1 + 2 + 3 + 4 + ... + n -> n(n+1)/2
+ 2 + 3 + 4 + ... + n -> (n-1)(n+2)/2
+ 3 + 4 + ... + n -> (n-2)(n+3)/2
+ 4 + ... + n -> (n-3)(n+4)/2
...
+ n -> (n-(n-1))(n+n)/2

O próximo passo é somar a última coluna

n(n+1)/2 + (n-1)(n+2)/2 + (n-2)(n+3)/2 + ... + (n-(n-1))(n+n)/2

o que a gente reescreve assim

1/2 * (n^2 + n^2 + n^2 + n^2 + ... + n^2
n + n + n + n + ... + n
- 1*2 - 2*3 - 3*4 - ... - (n-1)*n)

e depois assim

n^3/2 + n^2/2 - 1/2 * (1*2 + 2*3 + 3*4 + ... + (n-1)*n)

Agora, é a hora para um pequeno truque sujo.

Quer dizer, a ideia é desmontar a soma dentro dos parênteses assim

1*2 + 2*3 + 3*4 + ... + (n-1)*n
= 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 +
1 + 2 + 3 + ... + (n-1)

Sim! a gente encontrou o Q_n dentro do Q_n — (ou quase ...)

Agora, a gente pode reescrever a coisa assim

Q_n = n^3/2 + n^2/2 - 1/2 * (Q_n - n^2 + (n-1)*n)

e depois assim

Q_n = n^3/2 + n^2/2 - 1/2 * Q_n + n^2/2 - (n-1)*n/4

e depois assim

3Q_n/2 = n^3/2 + 3n^2/4 - n/4

e depois assim

Q_n = n^3/3 + n^2/2 - n/6

Legal, não é?