

O truque do retângulo

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, olhe mais uma vez para o triângulo

Q_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n
+ 2 + 3 + 4 + ... + n
+ 3 + 4 + ... + n
+ 4 + ... + n
⋮
+ n

E note que as linhas são todas muito parecidas.

Daí que, a gente pode completar as linhas para que elas fiquem iguais

1 + 2 + 3 + 4 + ... + n
1 + 2 + 3 + 4 + ... + n
1 + 2 + 3 + 4 + ... + n
1 + 2 + 3 + 4 + ... + n
...
1 + 2 + 3 + 4 + ... + n

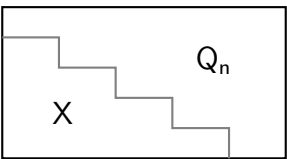
Pronto.

Agora nós temos um retângulo.

E é bem fácil ver que esse retângulo vale

n · (n + 1) / 2

Por outro lado, a gente também pode olhar para o retângulo assim



E daí, a gente pode escrever

X + Q_n = (n^2 · (n + 1)) / 2

Agora, se a gente descobrir o valor de X, então a gente descobre quanto vale o Q_n.

Certo.

Então o nosso problema é calcular

X = 1
+ 1 + 2
+ 1 + 2 + 3
+ 1 + 2 + 3 + 4
⋮
+ 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n - 1

Ora, mas a gente sabe calcular o valor de cada linha

X = 1 → (1^2 + 1) / 2
+ 1 + 2 → (2^2 + 2) / 2
+ 1 + 2 + 3 → (3^2 + 3) / 2
+ 1 + 2 + 3 + 4 → (4^2 + 4) / 2
⋮
+ 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n - 1 → ((n - 1)^2 + (n - 1)) / 2

E agora, somando a última coluna a gente obtém

X = (1/2) · (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n - 1)^2) + (1/2) · (1 + 2 + 3 + ... + (n - 1))
= (1/2) · (Q_n - n^2) + (1/2) · (n · (n - 1) / 2)
= (1/2) · Q_n - (n(n + 1) / 4)

Sim! a gente encontrou o Q_n dentro do X.

Daí que, a gente pode reescrever a nossa equação assim

(1/2) · Q_n - (n(n + 1) / 4) + Q_n = (n^2 · (n + 1)) / 2

e depois assim

(3/2) · Q_n = (n^2 · (n + 1)) / 2 + (n(n + 1)) / 4

e depois para

3 · Q_n = (2n^2 · (n + 1)) / 2 + n(n + 1)

e depois para

Q_n = (n · (n + 1) · (2n + 1)) / 6

o que é a mesma coisa que

Q_n = (n^3 / 3) + (n^2 / 2) - (n / 6)

Legal, não é?