

O argumento da pirâmide

Agora, a gente lembra que um quadrado também é uma soma de números ímpares.

Daí, a gente desmonta a soma de quadrados assim

$$Q_n = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \\ + 3 + 3 + 3 + \dots + 3 \\ + 5 + 5 + \dots + 5 \\ + 7 + \dots + 7 \\ \vdots \\ + 2n - 1$$

O próximo passo é somar as linhas do triângulo

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & \dots & \dots & + & 1 & \longrightarrow & n \cdot 1 \\
& & + & 3 & + & 3 & + & 3 & + & \dots & \dots & + & 3 & \longrightarrow & (n-1) \cdot 3 \\
& & & + & 5 & + & 5 & + & \dots & \dots & + & 5 & \longrightarrow & (n-2) \cdot 5 \\
& & & & + & 7 & + & \dots & \dots & + & 7 & \longrightarrow & (n-3) \cdot 7 \\
& & & & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
& & & & & & & & & & + & 2n-1 & \longrightarrow & (n-(n-1)) \cdot (2n-1)
\end{array}$$

E daí, a gente soma a última coluna para obter o seguinte

$$\begin{aligned} Q_n &= n \cdot 1 + n \cdot 3 + n \cdot 5 + n \cdot 7 + \dots + n \cdot (2n-1) \\ &\quad - 1 \cdot 3 - 2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 - \dots - (n-1) \cdot (2n-1) \end{aligned}$$

o que a gente reescreve assim

$$\begin{aligned} Q_n &= n \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)) \\ &\quad - (1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + (n-1) \cdot (2n-1)) \end{aligned}$$

e depois assim

$$Q_n = n^3 - (1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + (n-1) \cdot (2n-1))$$

Daí, a gente desmonta a soma entre parênteses, para ver uma coisa legal

Diagram illustrating the decomposition of the square Q_n into two triangles. The left triangle contains the sequence $1, 2, 3, \dots, n-1, n-1, n-1, n-1$. The right triangle contains the sequence $1, 2, 3, \dots, n-1, n-1, n-1, n-1$. The total area is labeled $Q_n = n^2$. An arrow points down to the formula $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

Quer dizer, nós acabamos de descobrir que

$$Q_n = n^3 - \left(Q_n - n^2 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} + Q_n - n^2 \right)$$

o que a gente reescreve assim

$$3Q_n = n^3 + 2n^2 - \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

e depois assim

$$Q_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

e depois assim

$$Q_n = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$$