

O truque da PA

Todo mundo sabe que a gente calcula a soma de 1 a n assim

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & \dots & \dots & + & n-1 & + & n \\ + & n & + & n-1 & + & \dots & \dots & + & 2 & + & 1 \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

E agora, a gente vai aplicar o truque da PA para calcular a soma dos quadrados.

Porque o Q_n é um monte de PA's

$$\begin{array}{cccccccccccc} Q_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \\ & & & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \\ & & & & & + & 3 & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \\ & & & & & & + & 4 & + & \dots & \dots & + & n \\ & & & & & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & + & n \end{array}$$

O primeiro passo é virar o Q_n ao contrário

$$\begin{array}{cccccccccccc} Q_n & = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & n-3 & + & \dots & \dots & + & 1 \\ & & + & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \dots & \dots & + & 2 \\ & & & + & n & + & n-1 & + & \dots & \dots & + & 3 \\ & & & & & + & n & + & \dots & \dots & + & 4 \\ & & & & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & + & n \end{array}$$

E daí, somando as duas cópias nós obtemos o seguinte

$$\begin{array}{cccccccccccc} 2Q_n & = & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & \dots & \dots & + & n+1 \\ & & & + & n+2 & + & n+2 & + & n+2 & + & \dots & \dots & + & n+2 \\ & & & & & + & n+3 & + & n+3 & + & \dots & \dots & + & n+3 \\ & & & & & & & + & n+4 & + & \dots & \dots & + & n+4 \\ & & & & & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & + & 2n \end{array}$$

Isso é um padrão repetitivo legal.

Só que não é bem o que a gente queria.

Quer dizer, não ficou tudo igual.

Mas, nós podemos colocar mais um Q_n para ver o que acontece.

Para isso, é preciso virar o Q_n ao contrário outra vez — (*colocando ele de cabeça para baixo*)

$$\begin{array}{cccccccccccc} Q_n & = & n & + & n & + & n & + & n & + & \dots & \dots & + & n \\ & & + & n-1 & + & n-1 & + & n-1 & + & \dots & \dots & + & n-1 \\ & & & & + & n-2 & + & n-2 & + & \dots & \dots & + & n-2 \\ & & & & & + & n-3 & + & \dots & \dots & + & n-3 \\ & & & & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & + & 1 \end{array}$$

Agora já não é difícil ver que a soma dos 3 Q_n 's vai dar

$$\begin{array}{cccccccccccc} 3Q_n & = & 2n+1 & + & 2n+1 & + & 2n+1 & + & 2n+1 & + & \dots & \dots & + & 2n+1 \\ & & + & 2n+1 & + & 2n+1 & + & 2n+1 & + & \dots & \dots & + & 2n+1 \\ & & & + & 2n+1 & + & 2n+1 & + & \dots & \dots & + & 2n+1 \\ & & & & & + & 2n+1 & + & \dots & \dots & + & 2n+1 \\ & & & & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & + & 2n+1 \end{array}$$

Um triângulo de $(2n+1)$'s!

Daí que,

$$3Q_n = (2n+1) \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

de modo que

$$Q_n = \frac{(2n+1) \cdot n \cdot (n+1)}{6}$$

Legal, não é?