

O truque mais velho do mundo

Um dia, alguém notou que

$$n^3 - (n-1)^3 = \textcircled{3n^2} - 3n + 1$$

Quer dizer, a diferença de dois cubos consecutivos produz um termo quadrado.

Daí, o próximo passo foi escrever

$$(n-1)^3 - (n-2)^3 = \textcircled{3(n-1)^2} - 3(n-1) + 1$$

E aqui, nós obtemos um termo com o quadrado anterior.

Quer dizer, a ideia é que nós podemos obter todos os quadrados assim.

E então, basta fazer a soma

$$\begin{array}{rcl} 1^3 - 0^3 & = & 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 \\ 2^3 - 1^3 & = & 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 \\ 3^3 - 2^3 & = & 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 \\ \dots & & \dots \\ + n^3 - (n-1)^3 & = & 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1 \end{array}$$

Mas, quando a gente faz isso, os cubos desaparecem todos — (*com a exceção do último ...*)

E a gente obtém o seguinte

$$\begin{aligned} n^3 &= 3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2) \\ &\quad - 3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) \\ &\quad + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \end{aligned}$$

o que a gente reescreve assim

$$n^3 = 3Q_n - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

e depois assim

$$3Q_n = n^3 + \frac{3n^2}{2} + \frac{3n}{2} - n$$

e depois assim

$$Q_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

Legal, não é?

Sim, mas o mais legal é que o truque também pode ser usado para calcular a soma de cubos.

Quer dizer, a ideia é somar as equações

$$\begin{array}{rcl} 1^4 - 0^4 & = & 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1 - 1 \\ 2^4 - 1^4 & = & 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2 - 1 \\ 3^4 - 2^4 & = & 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3 - 1 \\ \dots & & \dots \\ + n^4 - (n-1)^4 & = & 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot n^3 + 4 \cdot n - 1 \end{array}$$

Daí, a gente obtém o seguinte

$$\begin{aligned} n^3 &= 4 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3) \\ &\quad - 6 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2) \\ &\quad + 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) \\ &\quad - 1 - 1 - 1 - 1 - \dots - 1 \end{aligned}$$

o que a gente reescreve assim

$$n^4 = 4C_n - 6Q_n + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n$$

e depois assim

$$4C_n = n^4 + 6Q_n - 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

e depois assim

$$4C_n = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + n - 2n^2 - 2n + n$$

e depois assim

$$4C_n = n^4 + 2n^3 + n^2$$

e depois assim

$$4C_n = n^2 \cdot (n^2 + 2n + 1)$$

e depois assim

$$4C_n = n^2 \cdot (n+1)^2$$

e depois assim

$$C_n = \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right]^2$$

Legal, não é?