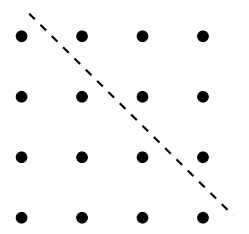


Soma de triângulos

Aqui, a gente começa observando o seguinte

$$Q_n \qquad = \qquad Q_{n-1} \quad + \quad n^2$$

Só que um quadrado é a mesma coisa que dois triângulos



Daí que, a gente pode reescrever a nossa equação assim

$$Q_n \qquad = \qquad Q_{n-1} \quad + \quad t_n \quad + \quad t_{n-1}$$

Mas, se dentro do Q_n tem um Q_{n-1} .

Então, dentro do Q_{n-1} tem um Q_{n-2} .

Quer dizer, o Q_n também é como uma cebola — (*ou um rocambole ...*)

Desenrolando esse rocambole com cuidado, nós obtemos

$$\begin{aligned} Q_n &= Q_{n-1} + (t_n + t_{n-1}) \\ &= Q_{n-2} + (t_{n-1} + t_{n-2}) + (t_n + t_{n-1}) \\ &= Q_{n-3} + (t_{n-2} + t_{n-3}) + (t_{n-1} + t_{n-2}) + (t_n + t_{n-1}) \end{aligned}$$

e assim por diante ...

Um rocambole, como a cebola, também não tem um caroço.

Daí que, desenrolando até o final, a gente obtém o seguinte

$$Q_n \quad = \quad (t_n + t_{n-1}) \quad + \quad (t_{n-1} + t_{n-2}) \quad + \quad \dots \quad \dots \quad + \quad (t_1 + t_0)$$

A esperteza agora consiste em olhar para o lado direito, e ver que falta pouco para que ali tenham duas somas de triângulos.

Quer dizer, só falta um t_n .

Então, somando t_n dos dois lados, nós podemos escrever a coisa assim

$$Q_n + t_n \quad = \quad 2 \times \left(t_1 + t_2 + \dots \dots + t_n \right)$$

de modo que

$$t_1 + t_2 + t_3 + \dots \dots + t_n \quad = \quad \frac{Q_n + t_n}{2}$$

Você não acha isso estranhamente parecido com

$$1 + 2 + 3 + \dots \dots + n \quad = \quad \frac{n^2 + n}{2} \quad ?$$

— (*porque?*)