

Argumento recursivo

Suponha dessa vez que n é uma potência de 2.

Daí, a gente escreve o Q_n assim

$$Q_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$$

E separa os termos pares e ímpares

$$\begin{aligned} Q_n &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (n-1)^2 \\ &\quad + 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + n^2 \end{aligned}$$

Trabalhando sobre os termos pares primeiro, a gente observa que eles podem ser reescritos assim

$$(2 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3)^2 + \dots + \left(2 \cdot \frac{n}{2}\right)^2$$

e depois assim

$$4 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 2^3 + \dots + (n/2)^2\right) = 4 \cdot Q_{\frac{n}{2}}$$

Certo.

Daí, a gente lembra que um quadrado é uma soma de ímpares.

Logo, um quadrado ímpar é igual a um quadrado par menos um ímpar.

E a gente pode escrever

$$\begin{aligned} &1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (n-1)^2 \\ = &2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + n^2 \\ &- 3 - 7 - 11 - \dots - (2n-1) \end{aligned}$$

e depois reescrever assim

$$4 \cdot Q_{\frac{n}{2}} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

Daí que, somando pares e ímpares, a gente obtém o seguinte

$$Q_n = 8 \cdot Q_{\frac{n}{2}} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

Legal.

A ideia, claro, é que a gente pode fazer a mesma coisa com o $Q_{\frac{n}{2}}$

$$\begin{aligned} Q_{\frac{n}{2}} &= 8 \cdot Q_{\frac{n}{4}} - \frac{(n/2)^2}{2} - \frac{(n/2)}{2} \\ &= 8 \cdot Q_{\frac{n}{4}} - \frac{n^2}{8} - \frac{n}{4} \end{aligned}$$

Daí que,

$$\begin{aligned} Q_n &= 8 \cdot Q_{\frac{n}{2}} - \frac{n^2}{2} \\ &= 8 \cdot \left[8 \cdot Q_{\frac{n}{4}} - \frac{n^2}{8}\right] - \frac{n^2}{2} \\ &= 8^2 \cdot Q_{\frac{n}{4}} - n^2 - \frac{n^2}{2} \\ &\quad - 2n - \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Nesse ponto, a gente já pode adivinhar que

$$\begin{aligned} Q_n &= 8^3 \cdot Q_{\frac{n}{8}} - 2n^2 - n^2 - \frac{n^2}{2} \\ &\quad - 8n - 2n - \frac{n}{2} \end{aligned}$$

o que a gente reescreve assim

$$\begin{aligned} Q_n &= 8^3 \cdot Q_{\frac{n}{2^3}} - 2^2 \cdot \frac{n^2}{2} - 2 \cdot \frac{n^2}{2} - 1 \cdot \frac{n^2}{2} \\ &\quad - 4^2 \cdot \frac{n}{2} - 4 \cdot \frac{n}{2} - 1 \cdot \frac{n}{2} \end{aligned}$$

e depois assim

$$\begin{aligned} Q_n &= 8^3 \cdot Q_{\frac{n}{2^3}} - \frac{n^2}{2} \cdot (1 + 2 + 2^2) \\ &\quad - \frac{n}{2} \cdot (1 + 4 + 4^2) \end{aligned}$$

Nesse ponto, a gente assume que $n = 2^k$.

Daí que,

$$\begin{aligned} Q_n &= 8^k \cdot Q_{\frac{n}{2^k}} - \frac{n^2}{2} \cdot (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1}) \\ &\quad - \frac{n}{2} \cdot (1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{k-1}) \end{aligned}$$

o que a gente reescreve assim

$$Q_n = (2^3)^k - \frac{n^2}{2} \cdot (2^k - 1) - \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{4^k - 1}{3}\right)$$

e depois assim

$$Q_n = n^3 - \frac{n^2}{2} \cdot (n - 1) - \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n^2 - 1}{3}\right)$$

e depois assim

$$Q_n = n^3 - \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{6}$$

e depois assim

$$Q_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

— *(o que é uma coisa que a gente já sabia ...)*