

Matemática Discreta

aula 03: Raciocinando sobre o infinito

1 Introdução

Hoje nós vamos começar com a pergunta

- *O que é o ∞ ?*

Bom, isso é o infinito.

Ou melhor, isso é o infinito matemático.

E o infinito matemático é só um programa que roda para sempre ...

Vejamos o que isso quer dizer na prática.

Um exemplo bem simples de infinito acontece quando nós dividimos 10 por 3

$$\begin{array}{r} 10 \\ 3 \overline{) 10} \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \vdots \end{array}$$

Quer dizer, a resposta é 3,333... — (*com uma sequência de 3's que vai até o infinito ...*)

Mas, a divisão é só um procedimento definido por algumas poucas regras.

Ela é como um programa que a gente executa dentro da nossa cabeça — (*com a ajuda do papel e da caneta ...*)

De fato, você pode escrever um programa (na sua linguagem de programação favorita) que permite o computador executar esse procedimento também

$$\boxed{P_{\text{div}}}$$

Daí, quando você dá 10 e 3 como entrada para esse programa, ele produz a sequência infinita de 3's

$$\begin{array}{c} 10 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \boxed{P_{\text{div}}} \longrightarrow 3,333...$$

E não pára nunca mais ...

Mas, a gente não é assim.

Quer dizer, a gente pára depois de um tempo.

Porque a gente percebe que apareceu um padrão

$$\begin{array}{r} 10 \\ 3 \overline{) 10} \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \vdots \end{array}$$

E vê a que a coisa entrou em repetição.

A gente sabe que se continuasse fazendo as contas, só iria continuar aparecendo o número 3.

É por isso que a gente escreve

$$3,333\dots$$

o que é uma maneira de escrever coisas infinitas.

E porque a gente tem uma maneira de escrever coisas infinitas, agora a gente pode raciocinar sobre coisas infinitas também.

É isso o que nós vamos ver na aula de hoje.

2 Raciocinando sobre o infinito

Considere a soma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Isso é uma soma que não acaba mais.

E olhando para os 3 pontinhos que aparecem no final, você deve estar pensando que isso é uma soma que um computador poderia escrever.

Sim, isso é verdade.

Mas, será que o computador também pode calcular essa soma?

E você, consegue calcular essa soma?

Bom, vejamos aqui uma pequena esperteza.

Quer dizer, nós começamos observando que

$$\frac{1}{2} = (0,1)_2$$

— (*i.e.*, 'zero vírgula um' na base 2)

Isso faz sentido, porque na base 10 é a mesma coisa

$$\frac{1}{10} = 0,1$$

Daí que, agora nós também podemos escrever

$$\frac{1}{4} = (0,01)_2$$

e

$$\frac{1}{8} = (0,001)_2$$

e por aí vai ...

Certo.

Então, reescrevendo a nossa soma na base 2, a coisa fica assim

$$(0,1)_2 + (0,01)_2 + (0,001)_2 + (0,0001)_2 + \dots$$

Quer dizer, fica mais fácil ver a coisa desse jeito

$$\begin{array}{r} 0,1 \\ 0,01 \\ 0,001 \\ 0,0001 \\ \dots \\ + \\ \hline \end{array}$$

Agora, a gente pode ver que isso é uma conta onde nunca acontece o “vai 1” — (*porque?*)

E daí, porque nunca acontece o “vai 1”, a gente pode fazer a conta da esquerda para a direita.

Fazendo isso, a gente chega no seguinte resultado

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = (0,111\dots)_2$$

Legal!

Mas, quanto é $(0,111\dots)_2$?

Bom, aqui nós precisamos usar mais um pequeno truque sujo matemático.

Quer dizer, essa pergunta é semelhante à seguinte pergunta na base 10

- *Quanto é $0,999\dots$?*

— (*porque o 1 é o 9 da base 2 ...*)

O truque para responder essa pergunta consiste em observar que

$$10 \times 0,999\dots = 9,999\dots$$

— (*nós estamos fazendo contas com números infinitos, mas elas fazem sentido — porque?*)

Daí, fazendo a subtração

$$\begin{array}{r} 9,999\dots \\ - 0,999\dots \\ \hline 9,000\dots = 9 \end{array}$$

nós vemos que a parte infinita desapareceu.

E nós acabamos de descobrir que

$$10 \times 0,999\dots - 0,999\dots = 9$$

Daí, colocando o 0.999... em evidência, nós reescrevemos a coisa assim

$$0,999... \times (10 - 1) = 9$$

E agora, nós descobrimos que

$$0,999... = 1$$

Legal.

Mas, a gente também pode fazer a mesma coisa na base 2.

Quer dizer, nós começamos observando que

$$2 \times (0,111...)_{2} = (1,111...)_{2}$$

— (*porque o 2 é o 10 da base 2 ...*)

Daí, a subtração

$$\begin{array}{r} (1,111...)_{2} \\ - (0,111...)_{2} \\ \hline (1,000...)_{2} = (1)_{2} \end{array}$$

faz a parte infinita desaparecer.

E daí, a equação

$$2 \times (0,111...)_{2} - (0,111...)_{2} = (1)_{2}$$

nos permite concluir que

$$(0,111...)_{2} = (1)_{2}$$

Donde,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = (1)_{2}$$

Mas, 1 na base 2 é a mesma coisa que 1 na base 10 — (*porque?*)

Logo,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$

Não é legal?

Exemplos

a. O truque da PG

Mas, você viu o que acabou de acontecer?

Quer dizer, no final das contas, a gente só aplicou o truque da PG.

Porque o número $(0,111...)_{2}$ é só um outro jeito de escrever a soma

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Daí, quando a gente escreve

$$2 \times (0,111...)_2 = (0,111...)_2$$

isso é a mesma coisa que multiplicar os dois lados por 2

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

e depois subtrair

$$\begin{array}{rcl} 2S & = & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \\ - S & = & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \\ \hline \end{array}$$

Fazendo essa conta, quase todos os termos se cancelam.

E nós descobrimos outra vez que

$$S = 1$$

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, a gente também pode escrever a soma outra vez

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

e depois reescrever assim

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right)}_S$$

Quer dizer, a gente encontrou a soma dentro da soma.

Daí que, a gente pode reescrever a coisa assim

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot S$$

e depois assim

$$\frac{1}{2} \cdot S = \frac{1}{2}$$

e depois assim

$$S = 1$$

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, vamos olhar para a soma outra vez

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Daí, a gente multiplica a coisa toda por 1

$$S = 1 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right)$$

Mas, 1 é a mesma coisa que $2 - 1$.

Então, a gente reescreve a coisa assim

$$S = (2 - 1) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right)$$

E daí, a gente faz a multiplicação

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \dots$$

Quer dizer, quase todos os termos se cancelam.

E nós descobrimos outra vez que

$$S = 1$$

◇

b. O truque do peteleco

Nem todo mundo gosta dos truques que nós acabamos de ver.

Mas, existe uma outra maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, a gente pode considerar a versão finita da soma.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

E daí, a gente aplica o truque do peteleco

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{2} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{16} & + & \frac{1}{32} \\ & & & & & & \underbrace{\hspace{1cm}} & & \\ & & & & \dots & \frac{1}{8} & \underbrace{\hspace{1cm}} & \frac{1}{16} & \underbrace{\hspace{1cm}} + \frac{1}{32} \end{array}$$

o que nos dá a resposta

$$1 - \frac{1}{32}$$

Agora, já não é difícil advinhar que a soma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{1024}$$

vai dar o resultado

$$1 - \frac{1}{1024}$$

E que em geral, a soma com n termos vale

$$1 - \frac{1}{2^n}$$

Quer dizer, o resultado é sempre 1 menos uma coisa bem pequenininha.

Daí que, a gente pode dizer que a soma infinita vale

$$1 = \frac{1}{2^\infty}$$

o que é igual a 1 — (*porque?*)

◇

c. Mais somas

Agora, considere a soma infinita

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots$$

Quanto é isso?

Bom, aqui nós podemos aplicar qualquer um dos truques que a gente acabou de ver.

Por exemplo, reescrevendo a soma na base 3, nós obtemos o seguinte

$$(0,111\dots)_3$$

Daí, a gente soma esse número duas vezes

$$(0,111\dots)_3 + (0,111\dots)_3 = (0,222\dots)_3$$

Só que, $(0,222\dots)_3$ é o 0,999... da base 3.

E isso é igual a 1.

Daí que,

$$(0,111\dots)_3 = \frac{1}{2}$$

o que é a mesma coisa que

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{1}{2}$$

Certo.

Mas, a gente também pode encontrar a soma dentro da soma

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \right)}_S$$

o que pode ser reescrito assim

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot S$$

e depois assim

$$\frac{2}{3} \cdot S = \frac{1}{3}$$

e depois assim

$$S = \frac{1}{2}$$

Nesse ponto, já está começando a aparecer um padrão

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{1}{2}$$

E a gente já pode adivinhar que

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{1}{3}$$

E em geral, nós temos que

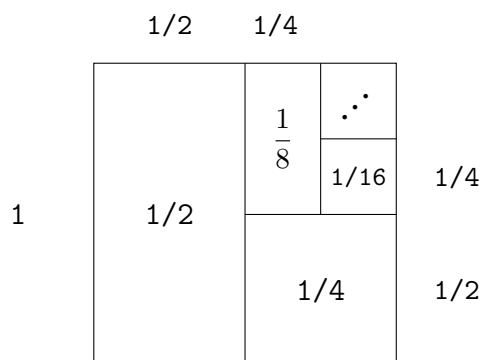
$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^4} + \dots = \frac{1}{k-1}$$

◇

d. Vendo o infinito

Mas o infinito também é uma coisa que se pode ver.

Por exemplo, olhando para a figura



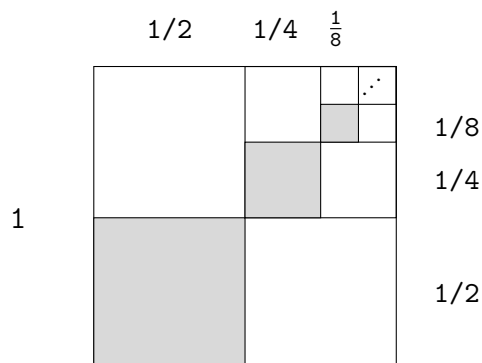
a gente vê que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$

— (*Você consegue ver?*)

E o mais legal é que, depois que a gente pega o jeito, a gente consegue ver outras coisas.

Por exemplo, a figura



está mostrando que

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{1}{3}$$

— (Você consegue ver?)

E qual é a figura que mostra quanto é isso aqui?

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{8^4} + \dots$$

◇

e. Desmontando o 1

Mas, aquilo que a gente vê na figura, a gente também pode ver fazendo contas

Quer dizer, a primeira figura começa dizendo que

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Daí, dividindo o segundo 1/2 em dois, nós obtemos

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

Daí, dividindo o segundo 1/4 em dois, nós obtemos

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

E continuando assim até o infinito, nós chegamos a

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

Não é legal?

A segunda figura é basicamente a mesma coisa.

Quer dizer, ela começa dizendo que

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

Daí, dividindo o último 1/4 em quatro, nós obtemos

$$1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}$$

Daí, dividindo o último 1/4² em quatro, nós obtemos

$$1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^3}$$

E continuando assim até o infinito, nós chegamos a

$$1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \left(\frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^3}\right) + \dots$$

o que a gente reescreve assim

$$1 = 3 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots \right)$$

e depois assim

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

Aqui, a gente já entendeu o princípio da coisa.

E agora, nós podemos fazer a mesma coisa sem a figura.

Por exemplo, a gente pode começar assim

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

Daí, dividindo o último $1/3$ em três, nós obtemos

$$1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2}$$

Daí, dividindo o último $1/3^2$ em três, nós obtemos

$$1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3}$$

E continuando assim até o infinito, nós chegamos a

$$1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \left(\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3} \right) + \dots$$

o que a gente reescreve assim

$$1 = 2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots \right)$$

e depois assim

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots$$

De fato, raciocinando dessa maneira, nós descobrimos que

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^4} + \dots = \frac{1}{k-1}$$

Não é legal?

◇

f. Desmontando outras coisas

Mas, o 1 não é a única coisa que a gente pode desmontar.

Quer dizer, a gente pode desmontar qualquer coisa ...

Por exemplo, todo mundo sabe que

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Daí, a gente reescreve a coisa assim

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

e depois assim

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

E aqui já tem uma coisa engraçada.

Quer dizer, essa equação está nos dando uma regra para desmontar o $1/3$.

Mas, o $1/3$ aparece dentro da própria regra.

Daí que, a gente pode reescrever o $1/3$ que aparece na regra usando a própria regra.

A coisa fica assim

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3} \end{aligned}$$

E daí, claro, como o $1/3$ apareceu outra vez, a gente pode fazer a mesma coisa outra vez

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{3} \end{aligned}$$

E continuando assim até o infinito, nós chegamos a

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \dots$$

Legal, não é?

◇

3 Coisas estranhas no infinito

Agora, considere a seguinte soma infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

Essa soma tem um padrão repetitivo bem simples.

Mas ela não é muito fácil de calcular.

Para entender o que está acontecendo, a gente dá um nome para a soma

$$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

— (a soma tem o nome de *série harmônica* ...)

e daí, a gente faz a seguinte modificação nos termos ímpares

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 H & = & \cancel{1} & + & \frac{1}{2} & + & \cancel{\frac{1}{3}} & + & \frac{1}{4} & + & \cancel{\frac{1}{5}} & + & \frac{1}{6} & + & \dots \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \\
 & & \frac{1}{2} & & & & \frac{1}{4} & & & & \frac{1}{6} & & & &
 \end{array}$$

Daí, como todos esses termos foram reduzidos, a gente pode escrever o seguinte

$$H > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \dots$$

E agora, a gente pode somar os pares de termos consecutivos

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 H & = & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) & + & \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) & + & \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) & + & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & &
 \end{array}$$

Quer dizer, a gente encontrou a nossa soma outra vez.

E isso nos permite concluir que

$$H > H$$

Só que isso é uma maluquice.

E isso é um sinal de que nós encontramos o infinito.

Quer dizer, o infinito é uma coisa de que a gente pode tirar um pedaço e ele continua do mesmo tamanho — (*o que é uma maluquice ...*)

É isso o que está acontecendo aqui.

Então, nós devemos ter

$$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \infty$$

Mas, isso ainda é uma coisa que nós precisamos ver.

E para ver isso, a gente quebra a soma em linhas assim

$$\begin{array}{rcl}
 H & = & 1 \\
 & + & \frac{1}{2} \\
 & + & \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\
 & + & \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\
 & + & \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{16} \\
 & + & \dots
 \end{array}$$

A primeira observação é que cada linha tem um número finito de parcelas.

Logo, esse esquema vai ter um número infinito de linhas.

E a segunda observação é que em todas as linhas nós temos uma quantidade $\geq 1/2$

$$\begin{aligned}
 H &= \underbrace{1}_{\geq 1/2} \\
 &+ \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq 1/2} \\
 &+ \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 1/2} \\
 &+ \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 1/2} \\
 &+ \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq 1/2} \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

Logo, a gente pode escrever

$$H > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

E isso já nos permite ver que H é igual a ∞ .

Legal, não é?

Sim, mas ainda tem uma outra coisa legal.

Quer dizer, considere agora a seguinte variação do nosso esquema

$$\begin{aligned}
 H &= 1 \\
 &+ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
 &+ \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \\
 &+ \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{15} \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

O ponto aqui é que agora as linhas são todas ≤ 1

$$\begin{aligned}
 H &= \underbrace{1}_{\leq 1} \\
 &+ \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{\leq 1} \\
 &+ \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{\leq 1} \\
 &+ \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{15}}_{\leq 1} \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

E isso nos permite obter um limite superior para as somas parciais de H .

Quer dizer, considere agora a soma finita

$$H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

E imagine que $n = 2^k - 1$.

Então, os termos de $H(n)$ preenchem exatamente $k + 1$ linhas do esquema.

E nós podemos escrever

$$H(n) \leq \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{k+1} = k + 1$$

O próximo passo é notar que

$$\log_2(n) = \log_2(2^k) = k$$

Daí que, nós podemos escrever

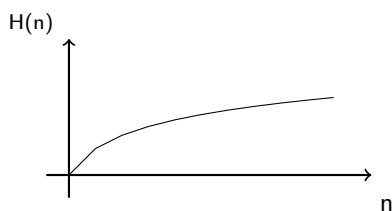
$$H(n) \leq \log_2(n) + 1$$

Mas não é só isso.

Quer dizer, utilizando a primeira versão do esquema, a gente pode adicionar o seguinte

$$\frac{\log_2(n)}{2} + 1 \leq H(n) \leq \log_2(n) + 1$$

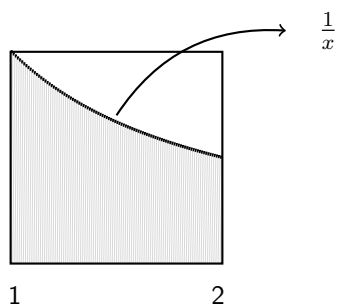
E isso já nos dá uma boa ideia da velocidade com que a soma H vai para o infinito



— (*i.e.*, como um logaritmo ...)

3.1 Mais coisas estranhas

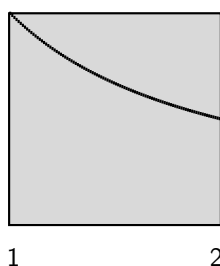
Agora considere a figura abaixo



E imagine que nós queremos calcular essa área

A ideia é que nós podemos fazer isso por meio de aproximações sucessivas.

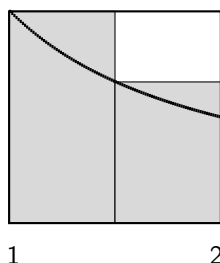
Quer dizer, a gente começa com o quadrado inteiro



o que dá

$$1$$

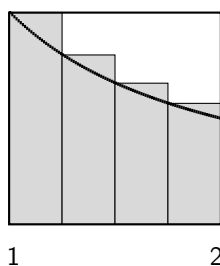
Daí, a gente remove a metade direita e adiciona um retângulo menor



o que dá

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3/2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

Daí, a gente faz a mesma coisa outra vez nas duas metades



o que dá

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5/4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7/4} \\ = & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Bom, já deu pra ver o que está acontecendo, não é?

Quer dizer, continuando assim até o infinito, a gente obtém a soma

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

E dessa vez a gente sabe que isso é uma coisa finita — *(porque é igual à área da figura)*

Certo.

Agora, a gente dá um nome para essa soma

$$L = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

Daí, a gente separa os termos pares e ímpares

$$L = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$- \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \dots$$

Depois, a gente separa os termos pares assim

$$L = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$- \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{10} - \frac{1}{14} -$$

$$- \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{12} - \frac{1}{16} -$$

E daí, a gente percorre as colunas, para reescrever a soma assim

$$L = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \dots$$

e depois assim

$$L = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

e depois assim

$$L = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right)$$

e depois assim

$$L = \frac{1}{2} \cdot L$$

Legal, não é? — (ou não?)

Mas, essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, dessa vez, a gente reescreve os termos pares assim

$$L = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{5} - \cancel{\frac{1}{6}} + \dots$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - 1\right) \qquad + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) \qquad + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)$$

Daí, a gente reescreve a coisa assim

$$\begin{aligned} L &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \right) \end{aligned}$$

e depois assim

$$L = 0$$

Mas, o que está acontecendo aqui?

Bom, a resposta é que nós encontramos o infinito outra vez.

Quer dizer, no segundo raciocínio nós chegamos a

$$L = \infty - \infty$$

E isso já é uma coisa que não faz sentido.

A mesma coisa aconteceu no primeiro raciocínio, quando nós separamos os termos pares e ímpares

$$\begin{aligned} L &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \\ &\quad - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \dots \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \left(\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots}_{\infty} \right) \end{aligned}$$

Quer dizer, o cálculo da área está correto.

E se a gente somar os termos na ordem em que eles aparecem, nós obtemos uma aproximação cada vez mais precisa para o valor da área.

Mas, a soma dos termos pares dá infinito — (*e a soma dos termos ímpares também ...*)

Daí que, na hora em que a gente separa uma coisa da outra, acontece a confusão.