

Matemática Discreta

lista de exercícios 03

1. Quanto é?

Você consegue calcular as somas abaixo?

a) Soma dos terços

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots$$

b) Soma dos dois-terços

$$\frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \frac{2^4}{3^4} + \dots$$

c) Soma alternada

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots$$

d) Soma com coeficientes

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots$$

e) Soma com coeficientes quadrados

$$\frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{3^2}{3^3} + \frac{4^2}{3^4} + \dots$$

2. Desmontação

O que acontece se, começando com isso aqui

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

você rearranja as coisas assim

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$$

e depois aplica essa regra pra sempre?

E se você começar com isso aqui

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

o que acontece?

3. Soma de inversos de triângulos

Você consegue calcular quanto é

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} + \dots$$

Dica: Escrevendo as coisas assim

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots$$

fica meio difícil de ver quanto isso vai dar — (*mas algumas pessoas conseguem desenrolar ...*)

Mas, lembrando que

$$t_n = \frac{n^2 + n}{2}$$

reescrevendo a soma assim

$$\frac{1}{\frac{1^2+1}{2}} + \frac{1}{\frac{2^2+2}{2}} + \frac{1}{\frac{3^2+3}{2}} + \frac{1}{\frac{4^2+4}{2}} + \dots$$

e reorganizando um pouco as coisas, você encontra uma soma que a gente já viu.

Depois que a gente vê isso, fica bem fácil saber quanto é a soma dos inversos dos triângulos.

4. Somas telescópicas

Calcule as somas abaixo

a) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{97 \cdot 100}$

b) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+3)}$

c) $\frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{3^2 - 1} + \frac{1}{4^2 - 1} + \frac{1}{5^2 - 1} + \dots + \frac{1}{n^2 - 1}$

d) $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$

e) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n-2) \cdot (n-1) \cdot n}$

5. Infinito ou não?

Nós vimos na aula 03 que a soma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

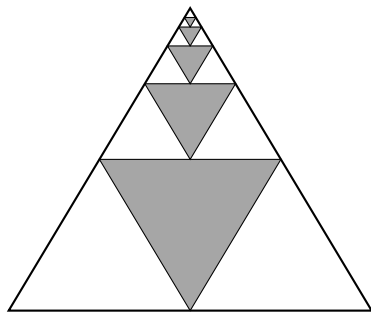
é igual a infinito.

Mas, o que você pode dizer sobre essa soma aqui:

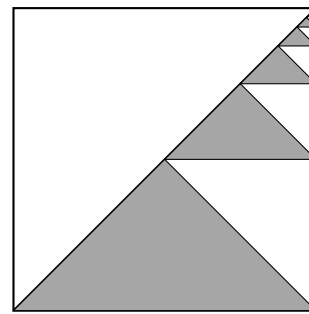
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Infinito ou não?

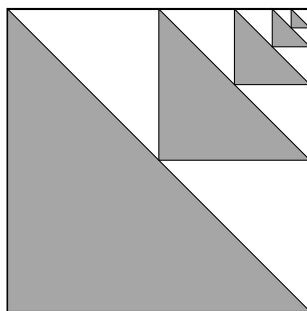
6. O que você vê aqui?



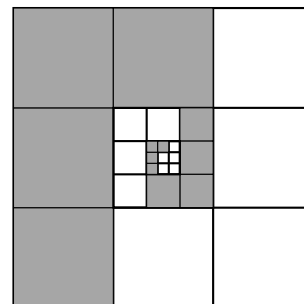
a soma dos triângulos



a soma dos picos



a soma das diagonais



a espiral quadrada

7. Mais somas de Fibonacci

a) Soma infinita

$$\frac{F_0}{1} + \frac{F_1}{10} + \frac{F_2}{10^2} + \frac{F_3}{10^3} + \dots$$

b) Soma de inversos de produtos

$$\frac{1}{F_0 \cdot F_2} + \frac{1}{F_1 \cdot F_3} + \frac{1}{F_2 \cdot F_4} + \dots + \frac{1}{F_{n-2} \cdot F_n}$$