

O truque da base 2

Considere a soma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Isso é uma soma que não acaba mais.

E olhando para os 3 pontinhos que aparecem no final, você deve estar pensando que isso é uma soma que um computador poderia escrever.

Sim, isso é verdade.

Mas, será que o computador também pode calcular essa soma?

E você, consegue calcular essa soma?

Bom, vejamos aqui uma pequena esperteza.

Quer dizer, nós começamos observando que

$$\frac{1}{2} = (0,1)_2$$

— (*i.e.*, 'zero vírgula um' na base 2)

Isso faz sentido, porque na base 10 é a mesma coisa

$$\frac{1}{10} = 0,1$$

Daí que, agora nós também podemos escrever

$$\frac{1}{4} = (0,01)_2$$

e

$$\frac{1}{8} = (0,001)_2$$

e por aí vai ...

Certo.

Então, reescrevendo a nossa soma na base 2, a coisa fica assim

$$(0,1)_2 + (0,01)_2 + (0,001)_2 + (0,0001)_2 + \dots$$

Quer dizer, fica mais fácil ver a coisa desse jeito

$$\begin{array}{r} 0,1 \\ 0,01 \\ 0,001 \\ 0,0001 \\ \dots \\ + \end{array}$$

Agora, a gente pode ver que isso é uma conta onde nunca acontece o “vai 1” — (*porque?*)

E daí, porque nunca acontece o “vai 1”, a gente pode fazer a conta da esquerda para a direita.

Fazendo isso, a gente chega no seguinte resultado

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = (0,111\dots)_2$$

Legal!

Mas, quanto é $(0,111\dots)_2$?

Bom, aqui nós precisamos usar mais um pequeno truque sujo matemático.

Quer dizer, essa pergunta é semelhante à seguinte pergunta na base 10

- Quanto é $0,999\dots$?*

— (*porque o 1 é o 9 da base 2 ...*)

O truque para responder essa pergunta consiste em observar que

$$10 \times 0,999\dots = 9,999\dots$$

— (*nós estamos fazendo contas com números infinitos, mas elas fazem sentido — porque?*)

Daí, fazendo a subtração

$$\begin{array}{r} 9,999\dots \\ - 0,999\dots \\ \hline 9,000\dots = 9 \end{array}$$

nós vemos que a parte infinita desapareceu.

E nós acabamos de descobrir que

$$10 \times 0,999\dots - 0,999\dots = 9$$

Daí, colocando o $0,999\dots$ em evidência, nós reescrevemos a coisa assim

$$0,999\dots \times (10 - 1) = 9$$

E agora, nós descobrimos que

$$0,999\dots = 1$$

Legal.

Mas, a gente também pode fazer a mesma coisa na base 2.

Quer dizer, nós começamos observando que

$$2 \times (0,111\dots)_2 = (1,111\dots)_2$$

— (*porque o 2 é o 10 da base 2 ...*)

Daí, a subtração

$$\begin{array}{r} (1,111\dots)_2 \\ - (0,111\dots)_2 \\ \hline (1,000\dots)_2 = (1)_2 \end{array}$$

faz a parte infinita desaparecer.

E daí, a equação

$$2 \times (0,111\dots)_2 - (0,111\dots)_2 = (1)_2$$

nos permite concluir que

$$(0,111\dots)_2 = (1)_2$$

Donde,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = (1)_2$$

Mas, 1 na base 2 é a mesma coisa que 1 na base 10 — (*porque?*)

Logo,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$

Não é legal?