

O truque da PG

Mas, você viu o que acabou de acontecer?

Quer dizer, no final das contas, a gente só aplicou o truque da PG.

Porque o número $(0,111\dots)_2$ é só um outro jeito de escrever a soma

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Daí, quando a gente escreve

$$2 \times (0,111\dots)_2 - (0,111\dots)_2$$

isso é a mesma coisa que multiplicar os dois lados por 2

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

e depois subtrair

$$\begin{array}{rcl} 2S & = & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \\ - S & = & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \\ \hline \end{array}$$

Fazendo essa conta, quase todos os termos se cancelam.

E nós descobrimos outra vez que

$$S = 1$$

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, a gente também pode escrever a soma outra vez

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

e depois reescrever assim

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right)}_S$$

Quer dizer, a gente encontrou a soma dentro da soma.

Daí que, a gente pode reescrever a coisa assim

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot S$$

e depois assim

$$\frac{1}{2} \cdot S = \frac{1}{2}$$

e depois assim

$$S = 1$$

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, vamos olhar para a soma outra vez

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Daí, a gente multiplica a coisa toda por 1

$$S = 1 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right)$$

Mas, 1 é a mesma coisa que $2 - 1$.

Então, a gente reescreve a coisa assim

$$S = (2 - 1) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right)$$

E daí, a gente faz a multiplicação

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \dots$$

Quer dizer, quase todos os termos se cancelam.

E nós descobrimos outra vez que

$$S = 1$$