

Generalização

Agora, considere a soma infinita

$$\frac{1}{3} \quad + \quad \frac{1}{3^2} \quad + \quad \frac{1}{3^3} \quad + \quad \frac{1}{3^4} \quad + \quad \dots$$

Quanto é isso?

Bom, aqui nós podemos aplicar qualquer um dos truques que a gente acabou de ver.

Por exemplo, reescrevendo a soma na base 3, nós obtemos o seguinte

$$(0,111\dots)_3$$

Daí, a gente soma esse número duas vezes

$$(0,111\dots)_3 \quad + \quad (0,111\dots)_3 \quad = \quad (0,222\dots)_3$$

Só que,  $(0,222\dots)_3$  é o 0,999... da base 3.

E isso é igual a 1.

Daí que,

$$(0,111\dots)_3 \quad = \quad \frac{1}{2}$$

o que é a mesma coisa que

$$\frac{1}{3} \quad + \quad \frac{1}{3^2} \quad + \quad \frac{1}{3^3} \quad + \quad \frac{1}{3^4} \quad + \quad \dots \quad = \quad \frac{1}{2}$$

Certo.

Mas, a gente também pode encontrar a soma dentro da soma

$$S \quad = \quad \frac{1}{3} \quad + \quad \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\left( \frac{1}{3} \quad + \quad \frac{1}{3^2} \quad + \quad \frac{1}{3^3} \quad + \quad \dots \right)}_S$$

o que pode ser reescrito assim

$$S \quad = \quad \frac{1}{3} \quad + \quad \frac{1}{3} \cdot S$$

e depois assim

$$\frac{2}{3} \cdot S \quad = \quad \frac{1}{3}$$

e depois assim

$$S \quad = \quad \frac{1}{2}$$

Nesse ponto, já está começando a aparecer um padrão

$$\frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2^2} \quad + \quad \frac{1}{2^3} \quad + \quad \frac{1}{2^4} \quad + \quad \dots \quad = \quad 1$$

$$\frac{1}{3} \quad + \quad \frac{1}{3^2} \quad + \quad \frac{1}{3^3} \quad + \quad \frac{1}{3^4} \quad + \quad \dots \quad = \quad \frac{1}{2}$$

E a gente já pode advinhar que

$$\frac{1}{4} \quad + \quad \frac{1}{4^2} \quad + \quad \frac{1}{4^3} \quad + \quad \frac{1}{4^4} \quad + \quad \dots \quad = \quad \frac{1}{3}$$

E em geral, nós temos que

$$\frac{1}{k} \quad + \quad \frac{1}{k^2} \quad + \quad \frac{1}{k^3} \quad + \quad \frac{1}{k^4} \quad + \quad \dots \quad = \quad \frac{1}{k-1}$$