

Desmontando o 1

Mas, aquilo que a gente vê na figura, a gente também pode ver fazendo contas

Quer dizer, a primeira figura começa dizendo que

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Daí, dividindo o segundo 1/2 em dois, nós obtemos

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

Daí, dividindo o segundo 1/4 em dois, nós obtemos

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

E continuando assim até o infinito, nós chegamos a

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

Não é legal?

A segunda figura é basicamente a mesma coisa.

Quer dizer, ela começa dizendo que

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

Daí, dividindo o último 1/4 em quatro, nós obtemos

$$1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}$$

Daí, dividindo o último 1/4² em quatro, nós obtemos

$$1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^3}$$

E continuando assim até o infinito, nós chegamos a

$$1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \left(\frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^3}\right) + \dots$$

o que a gente reescreve assim

$$1 = 3 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots\right)$$

e depois assim

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

Aqui, a gente já entendeu o princípio da coisa.

E agora, nós podemos fazer a mesma coisa sem a figura.

Por exemplo, a gente pode começar assim

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

Daí, dividindo o último 1/3 em três, nós obtemos

$$1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2}$$

Daí, dividindo o último 1/3² em três, nós obtemos

$$1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3}$$

E continuando assim até o infinito, nós chegamos a

$$1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \dots$$

o que a gente reescreve assim

$$1 = 2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots\right)$$

e depois assim

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots$$

De fato, raciocinando dessa maneira, nós descobrimos que

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^4} + \dots = \frac{1}{k-1}$$

Não é legal?