

Coisas estranhas no infinito

Agora, considere a seguinte soma infinita

$$1 \quad + \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{3} \quad + \quad \frac{1}{4} \quad + \quad \frac{1}{5} \quad + \quad \frac{1}{6} \quad + \quad \dots$$

Essa soma tem um padrão repetitivo bem simples.

Mas ela não é muito fácil de calcular.

Para entender o que está acontecendo, a gente dá um nome para a soma

$$H \quad = \quad 1 \quad + \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{3} \quad + \quad \frac{1}{4} \quad + \quad \frac{1}{5} \quad + \quad \frac{1}{6} \quad + \quad \dots$$

— (*a soma tem o nome de série harmônica ...*)

e daí, a gente faz a seguinte modificação nos termos ímpares

$$H \quad = \quad \cancel{1} \quad + \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \cancel{\frac{1}{3}} \quad + \quad \frac{1}{4} \quad + \quad \cancel{\frac{1}{5}} \quad + \quad \frac{1}{6} \quad + \quad \dots$$
$$\qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$
$$\qquad \qquad \qquad \frac{1}{2} \qquad \qquad \qquad \frac{1}{4} \qquad \qquad \qquad \frac{1}{6}$$

Daí, como todos esses termos foram reduzidos, a gente pode escrever o seguinte

$$H \quad > \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{4} \quad + \quad \frac{1}{4} \quad + \quad \frac{1}{6} \quad + \quad \frac{1}{6} \quad + \quad \dots$$

E agora, a gente pode somar os pares de termos consecutivos

$$H \quad = \quad \left(\frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2} \right) \quad + \quad \left(\frac{1}{4} \quad + \quad \frac{1}{4} \right) \quad + \quad \left(\frac{1}{6} \quad + \quad \frac{1}{6} \right) \quad + \quad \dots$$
$$\qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$
$$\qquad \qquad \qquad 1 \qquad \qquad \qquad \frac{1}{2} \qquad \qquad \qquad \frac{1}{3}$$

Quer dizer, a gente encontrou a nossa soma outra vez.

E isso nos permite concluir que

$$H \quad > \quad H$$

Só que isso é uma maluquice.

E isso é um sinal de que nós encontramos o infinito.

Quer dizer, o infinito é uma coisa de que a gente pode tirar um pedaço e ele continua do mesmo tamanho — (*o que é uma maluquice ...*)

É isso o que está acontecendo aqui.

Então, nós devemos ter

$$H \quad = \quad 1 \quad + \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{3} \quad + \quad \frac{1}{4} \quad + \quad \frac{1}{5} \quad + \quad \dots \quad = \quad \infty$$

Mas, isso ainda é uma coisa que nós precisamos ver.

E para ver isso, a gente quebra a soma em linhas assim

$$H \quad = \quad \begin{array}{l} 1 \\ + \quad \frac{1}{2} \\ + \quad \frac{1}{3} \quad + \quad \frac{1}{4} \\ + \quad \frac{1}{5} \quad + \quad \frac{1}{6} \quad + \quad \frac{1}{7} \quad + \quad \frac{1}{8} \\ + \quad \frac{1}{9} \quad + \quad \frac{1}{10} \quad + \quad \frac{1}{11} \quad + \quad \frac{1}{12} \quad + \quad \dots \quad + \quad \frac{1}{16} \\ + \quad \dots \end{array}$$

A primeira observação é que cada linha tem um número finito de parcelas.

Logo, esse esquema vai ter um número infinito de linhas.

E a segunda observação é que em todas as linhas nós temos uma quantidade $\geq 1/2$

$$H \quad = \quad \begin{array}{l} \left(1 \right) \qquad \qquad \geq 1/2 \\ + \left(\frac{1}{2} \right) \qquad \qquad \geq 1/2 \\ + \left(\frac{1}{3} \quad + \quad \frac{1}{4} \right) \qquad \geq 1/2 \\ + \left(\frac{1}{5} \quad + \quad \frac{1}{6} \quad + \quad \frac{1}{7} \quad + \quad \frac{1}{8} \right) \qquad \geq 1/2 \\ + \left(\frac{1}{9} \quad + \quad \frac{1}{10} \quad + \quad \frac{1}{11} \quad + \quad \frac{1}{12} \quad + \quad \dots \quad + \quad \frac{1}{16} \right) \geq 1/2 \\ + \quad \dots \end{array}$$

Logo, a gente pode escrever

$$H \quad > \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \dots$$

E isso já nos permite ver que H é igual a ∞ .

Legal, não é?

Sim, mas ainda tem uma outra coisa legal.

Quer dizer, considere agora a seguinte variação do nosso esquema

$$H \quad = \quad \begin{array}{l} 1 \\ + \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{3} \\ + \quad \frac{1}{4} \quad + \quad \frac{1}{5} \quad + \quad \frac{1}{6} \quad + \quad \frac{1}{7} \\ + \quad \frac{1}{8} \quad + \quad \frac{1}{9} \quad + \quad \frac{1}{10} \quad + \quad \frac{1}{11} \quad + \quad \dots \quad + \quad \frac{1}{15} \\ + \quad \dots \end{array}$$

O ponto aqui é que agora as linhas são todas ≤ 1

$$H \quad = \quad \begin{array}{l} \left(1 \right) \qquad \qquad \leq 1 \\ + \left(\frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{3} \right) \qquad \leq 1 \\ + \left(\frac{1}{4} \quad + \quad \frac{1}{5} \quad + \quad \frac{1}{6} \quad + \quad \frac{1}{7} \right) \qquad \leq 1 \\ + \left(\frac{1}{8} \quad + \quad \frac{1}{9} \quad + \quad \frac{1}{10} \quad + \quad \frac{1}{11} \quad + \quad \dots \quad + \quad \frac{1}{15} \right) \leq 1 \\ + \quad \dots \end{array}$$

E isso nos permite obter um limite superior para as somas parciais de H .

Quer dizer, considere agora a soma finita

$$H(n) \quad = \quad 1 \quad + \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{3} \quad + \quad \frac{1}{4} \quad + \quad \dots \quad + \quad \frac{1}{n}$$

E imagine que $n = 2^k - 1$.

Então, os termos de $H(n)$ preenchem exatamente $k + 1$ linhas do esquema.

E nós podemos escrever

$$H(n) \quad \leq \quad \underbrace{1 \quad + \quad 1 \quad + \quad 1 \quad + \quad \dots \quad + \quad 1}_{k+1} \quad = \quad k \quad + \quad 1$$

O próximo passo é notar que

$$\log_2(n) \quad = \quad \log_2(2^k) \quad = \quad k$$

Daí que, nós podemos escrever

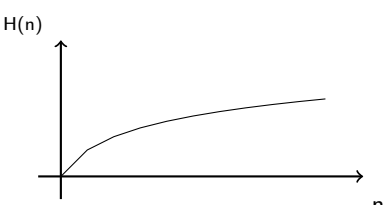
$$H(n) \quad \leq \quad \log_2(n) \quad + \quad 1$$

Mas não é só isso.

Quer dizer, utilizando a primeira versão do esquema, a gente pode adicionar o seguinte

$$\frac{\log_2(n)}{2} \quad + \quad 1 \quad \leq \quad H(n) \quad \leq \quad \log_2(n) \quad + \quad 1$$

E isso já nos dá uma boa ideia da velocidade com que a soma H vai para o infinito



— (*i.e., como um logaritmo ...*)