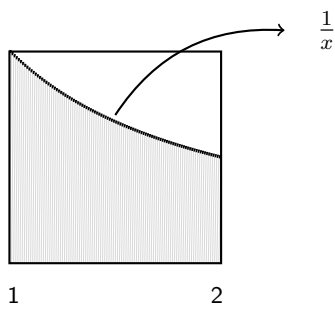


Coisas estranhas no infinito

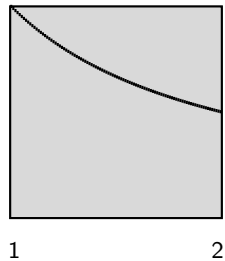
Agora considere a figura abaixo



E imagine que nós queremos calcular essa área

A ideia é que nós podemos fazer isso por meio de aproximações sucessivas.

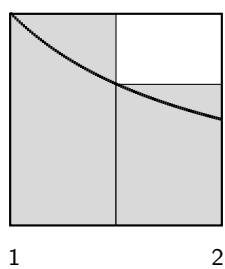
Quer dizer, a gente começa com o quadrado inteiro



o que dá

$$1$$

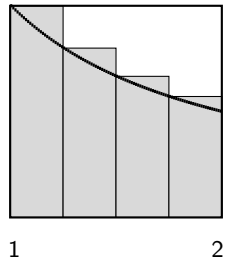
Daí, a gente remove a metade direita e adiciona um retângulo menor



o que dá

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3/2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

Daí, a gente faz a mesma coisa outra vez nas duas metades



o que dá

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5/4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7/4} \\ = & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Bom, já deu pra ver o que está acontecendo, não é?

Quer dizer, continuando assim até o infinito, a gente obtém a soma

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

E dessa vez a gente sabe que isso é uma coisa finita — *(porque é igual à área da figura)*

Certo.

Agora, a gente dá um nome para essa soma

$$L = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

Daí, a gente separa os termos pares e ímpares

$$\begin{aligned} L &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \\ &\quad - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \dots \end{aligned}$$

Depois, a gente separa os termos pares assim

$$\begin{aligned} L &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \\ &\quad - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{10} - \frac{1}{14} - \dots \\ &\quad - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{12} - \frac{1}{16} - \dots \end{aligned}$$

E daí, a gente percorre as colunas, para reescrever a soma assim

$$L = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \dots$$

e depois assim

$$L = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

e depois assim

$$L = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right)$$

e depois assim

$$L = \frac{1}{2} \cdot L$$

Legal, não é? — (ou não?)

Mas, essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, dessa vez, a gente reescreve os termos pares assim

$$\begin{aligned} L &= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{5} - \cancel{\frac{1}{6}} + \dots \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} - 1\right) \qquad + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) \qquad + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Daí, a gente reescreve a coisa assim

$$\begin{aligned} L &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots\right) \end{aligned}$$

e depois assim

$$L = 0$$

Mas, o que está acontecendo aqui?

Bom, a resposta é que nós encontramos o infinito outra vez.

Quer dizer, no segundo raciocínio nós chegamos a

$$L = \infty - \infty$$

E isso já é uma coisa que não faz sentido.

A mesma coisa aconteceu no primeiro raciocínio, quando nós separamos os termos pares e ímpares

$$\begin{aligned} L &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \\ &\quad - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \dots \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right)}_{\infty} \end{aligned}$$

Quer dizer, o cálculo da área está correto.

E se a gente somar os termos na ordem em que eles aparecem, nós obtemos uma aproximação cada vez mais precisa para o valor da área.

Mas, a soma dos termos pares dá infinito — *(e a soma dos termos ímpares também ...)*

Daí que, na hora em que a gente separa uma coisa da outra, acontece a confusão.