

Matemática Discreta

lista de exercícios 04

1. A regra do 24

Nós demonstramos na aula que

- Se 2 divide x e 3 divide x , então $2 \cdot 3 = 6$ divide x .

Mas a seguinte regra não funciona

- Se 4 divide x e 6 divide x , então $4 \cdot 6 = 24$ divide x .

Quer dizer, 36 é um contra-exemplo.

- a) Porque a regra não funciona?
- b) Apresente uma regra de divisibilidade do 24 que funciona.

Você deve argumentar que a sua regra sempre funciona.

2. A regra do 13

- Multiplique o último dígito por 4
E some o resultado
ao número formado pelos outros dígitos.
Repita essa operação de novo, de novo e de novo.
Se você conseguir alcançar o 13 dessa maneira
então o seu número é divisível por 13
senão ele não é.

Essa regra funciona?

E, se não funciona, você consegue consertá-la?

3. Divisibilidade em outras bases

- a) Qual é a regra do 3 na base 2?

Nota: A ideia é semelhante ao que acontece na base 10.

Quer dizer, examine os números $(1)_2$, $(10)_2$, $(100)_2$, ... e verifique que tipo de caixinha eles são — (*quando nós formamos grupinhos de 3*).

Daí, com base nessa informação, você monta a regra do 3 na base 2.

- b) Qual é a regra do 2 na base 3?
- c) Qual é a regra do 3 na base 11?
- d) Qual é a regra do 10 na base 11?

4. Outra regra do 3

Considere a seguinte regra para a divisibilidade do 3

- Para cada dígito, subtraia o maior múltiplo de 3 que você puder — (i.e., 0, 3, 6 ou 9)

Por exemplo,

$$\begin{array}{cccccccc} 4 & 2 & 7 & 6 & 4 & 1 & 5 & 9 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}$$

Daí, calcule a diferença da quantidade de 1's e da quantidade de 2's

$$\# 1's - \# 2's$$

Se o resultado for um múltiplo de 3, então o número original é múltiplo de 3; caso contrário, ele não é.

No exemplo acima, nós temos

$$\# 1's - \# 2's = 4 - 3 = 1$$

logo o número 427641592 não é múltiplo de 3.

Explique porque essa regra sempre funciona.

5. Certo ou errado?

A regra da divisibilidade do 3^k é assim

→ Some todos os dígitos do número e verifique se a soma é divisível por 3^k ,
se for então é, e se não for então não é

E então, certo ou errado?

Explique.

6. Divisibilidade de potências

Considere os números da forma

$$2^n - 1$$

a) Qual é a regra do 3 para esses números?

(A regra deve aplicar algum teste (simples) sobre n , e daí dizer se $2^n - 1$ é divisível por 3 ou não.)

b) Qual é a regra do 5 para esses números?

c) Qual é a regra do 7 para esses números?

7. As regras do 13 e do 19

A regra do 13 é assim

→ Separe o último dígito e multiplique ele por 4.

Some o resultado ao número formado pelo restante dos dígitos.

Se aquilo que der for divisível por 13,

então o nosso número é divisível por 13.

Por exemplo,

$$403 \Rightarrow 40 + 4 \cdot 3 = 52$$

$$52 \Rightarrow 5 + 4 \cdot 2 = 13$$

logo, 403 é divisível por 13.

Legal!

Mas, porque será que isso funciona?

Bom, considere um número qualquer e faça a decomposição

$$N = \underbrace{d_n \dots d_2 d_1}_K \mid d_0$$

Então,

$$N = 10 \cdot K + d_0$$

Agora, multiplique os dois lados por 4

$$4N = 40 \cdot K + 4 \cdot d_0$$

A observação chave é que

→ $4N$ é divisível por 13 apenas se N também for divisível por 13
— (porque 4 e 13 são primos entre si)

Mas,

$$\begin{aligned} 4N &= 40 \cdot K + 4 \cdot d_0 \\ &= K + 4 \cdot d_0 + 39 \cdot K \end{aligned}$$

E isso é divisível por 13 apenas se $K + 4 \cdot d_0$ também for.

Pronto! aqui nós temos a regra do 13.

Certo.

Agora é a sua vez.

- Qual é a regra do 19?