

Matemática Discreta

lista de exercícios 05

1. Divisibilidade por 13

Responda a pergunta abaixo

- Será que $2^{70} + 3^{70}$ é divisível por 13?

Depois explique como você chegou na resposta.

E encontre outro expoente onde a coisa também funciona.

2. Raciocinando a divisibilidade

Não é difícil ver que

$$\rightarrow 5^{2n} + 7 \text{ é sempre divisível por } 8$$

Quer dizer, a esperteza é reescrever a coisa assim

$$5^{2n} + 7 = 8 + 8 \rightarrow 5^{2n} - 1 + 8$$

e depois assim

$$(5^2)^n - 1 + 8$$

e depois assim

$$25^n - 1 + 8$$

Aqui a gente vê que a primeira parte é divisível por 24.

Mas, tudo o que é divisível por 24 também é divisível por 8.

Logo, a coisa toda é divisível por 8.

Agora é a sua vez.

Você consegue mostrar o seguinte?

$$\rightarrow 2^{2n+1} + 1 \text{ é sempre divisível por } 3$$

E isso aqui?

$$\rightarrow 2^{n+1} + 3^{3n+1} \text{ é sempre divisível por } 5$$

3. Divisibilidade por ímpar

É bem fácil ver que

$$\rightarrow n(n+1) \text{ é sempre divisível por } 2$$

Porque ou n é par ou $n+1$ é par.

E o produto de um número par por qualquer outra coisa é sempre divisível por 2.

E agora, você consegue mostrar o seguinte?

$$\rightarrow n^3 - n \text{ é sempre divisível por } 3$$

E isso aqui?

$$\rightarrow n^5 - n \text{ é sempre divisível por } 5$$

E esse outro?

$$\rightarrow n^7 - n \text{ é sempre divisível por } 7$$

Até onde isso vai?

4. Divisibilidade por 9

É bem fácil ver que

$$\rightarrow n + (n + 1) + (n + 2) \text{ é sempre divisível por } 3$$

Porque?

E agora, você consegue mostrar o seguinte?

$$\rightarrow n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 \text{ é sempre divisível por } 9$$

5. Divisibilidade por 24

Argumente que

$$\rightarrow n(n^2 - 1) \text{ é sempre divisível por } 24 \text{ quando } n \text{ é ímpar}$$

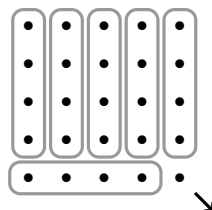
6. Mais divisibilidade

É bem fácil ver que

$$\rightarrow n^2 - 1 \text{ é sempre divisível por } n - 1$$

Quer dizer,

- basta desenhar um quadrado (n^2)
- tirar um pontinho (1)
- e dividir o restante em grupinhos de $n - 1$



E agora, você consegue mostrar o seguinte?

$\rightarrow n^3 - 1$ é sempre divisível por $n - 1$

E isso aqui?

$\rightarrow n^n - 1$ é sempre divisível por $n - 1$

7. Inteiro ou não?

É bem fácil ver que

$\rightarrow \frac{n^3 + 6n^2 + 2n}{3}$ é sempre um número inteiro

Quer dizer, primeiro a gente reescreve a coisa assim

$$\frac{n^3 + 2n}{3} + \frac{6n^2}{3} \rightarrow \frac{n^3 + 2n}{3} + 2n^2$$

Daí, a esperteza é reescrever o primeiro termo assim

$$\frac{n^3 + 2n - 3n + 3n}{3} + 2n^2$$

e depois assim

$$\frac{n^3 - n}{3} + \frac{3n}{3} + 2n^2 \rightarrow \frac{n^3 - n}{3} + n + 2n^2$$

E aqui a gente lembra do exercício (?)

$\rightarrow n^3 - n$ é sempre divisível por 3

Agora é a sua vez.

Você consegue mostrar o seguinte?

$\rightarrow \frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$ é sempre um número inteiro

E isso aqui?

$\rightarrow \frac{n^7}{7} + \frac{n^3}{3} + \frac{11n}{21}$ é sempre um número inteiro

8. Infinitos múltiplos

a) Argumente que existem infinitos múltiplos de 7 da forma

$$10^n + 3$$

b) Considere os números da forma

$$4n^2 - 1$$

E argumente que

- existem infinitos múltiplos de 5 dessa forma

- existem infinitos múltiplos de 13 dessa forma
- existem infinitos múltiplos de 5 e 13 dessa forma

c) Considere os números da forma

$$2^n - 3$$

E argumente que

- existem infinitos múltiplos de 5 dessa forma
- existem infinitos múltiplos de 13 dessa forma
- não existe nenhum múltiplo de 5 e 13 dessa forma