

Desmontando, montando e desmontando

Abrindo um livro de matemática ao acaso, a gente encontra o seguinte

$$\rightarrow 2^{2n} - 1 \text{ é sempre divisível por } 3$$

Mas porque?

Ou melhor, como é que a gente vê isso?

Bom, a resposta é: desmontando.

E a gente começa desmontando a palavra ‘sempre’.

Quer dizer, a palavra ‘sempre’ significa que todos os números abaixo são divisíveis por 3

$$2^2 - 1, \quad 2^4 - 1, \quad 2^6 - 1, \quad 2^8 - 1, \quad 2^{10} - 1, \quad \dots$$

Mas porque?

Bom, aqui a gente precisa desmontar outra vez.

Quer dizer, primeiro a gente nota que as potências de 2 são todas pares.

E daí, a gente reescrev qualquer um dos termos assim

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2}_{2k} = 1$$

Daí, porque isso é uma quantidade par de 2’s, a gente pode formar grupinhos assim

$$\underbrace{(2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot \dots \cdot (2 \cdot 2)}_{2n} = 1$$

Finalmente, fazendo a multiplicação dentro de cada grupinho, a gente chega no seguinte

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 4}_k = 1$$

Quer dizer, no final das contas, a frase do livro está falando de potências de 4

$$4^1 - 1, \quad 4^2 - 1, \quad 4^3 - 1, \quad 4^4 - 1, \quad 4^5 - 1, \quad \dots$$

Sim, mas porque essas coisas são divisíveis por 3?

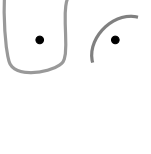
Ora, mas isso é uma coisa bem fácil de ver.

Só que para isso, a gente vai ter que desmontar outra vez.

Quer dizer, a gente começa notando que o 4 é um quadrado

$$\begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

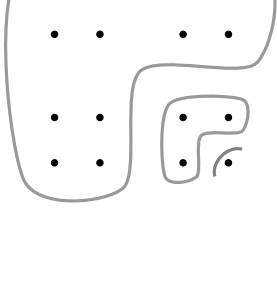
E daí a gente vê que tirando 1 do quadrado, aquilo que sobra é divisível por 3



A seguir, a gente nota que o 4² é um quadrado de quadrados

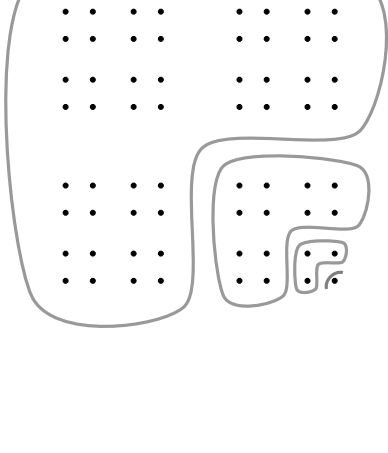
$$\begin{array}{cc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

E daí a gente vê que tirando 1 do quadrado de quadrados, aquilo que sobra é divisível por 3



A seguir, a gente nota que o 4³ é um quadrado de quadrados de quadrados.

E daí a gente vê que tirando 1, aquilo que sobra é divisível por 3



Legal.

Já deu pra ver que a coisa entrou em repetição.

Mas, como é que a gente vê isso?

Bom, dessa vez a resposta é: montando.

Quer dizer, agora a gente vai olhar para o 4⁴.

A gente já sabe que o 4⁴ é um quadrado de quadrados de quadrados de quadrados.

E a gente monta ele assim

$$4^3 \qquad \qquad 4^3$$
$$4^3 \qquad \begin{array}{cc} \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \end{array}$$
$$\qquad \begin{array}{cc} \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \end{array}$$

Sim! o 4³ aparece dentro do 4⁴.

Pois é, e tirando 1 de uma das cópias, essa cópia fica divisível por 3

$$4^3 \qquad \qquad 4^3$$
$$4^3 \qquad \begin{array}{cc} \bullet \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \end{array}$$
$$\qquad \begin{array}{cc} \bullet \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \end{array}$$

E é claro que as outras 3 cópias juntas também são uma coisa divisível por 3.

Logo, a coisa toda é divisível por 3 — *(depois que a gente tira 1)*

Legal!

Sim, mas essa não é a única maneira de ver a repetição.

Quer dizer, a gente também pode escrever a figura aí de cima assim

$$4^4 = 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3 + 1$$

Daí, a gente olha para o 4⁵.

E vê que ele é um quadrado de 4⁴ assim

$$4^5 = 4 \cdot 4^4$$

O próximo passo é reescrever a coisa assim

$$4^5 = 3 \cdot 4^4 + 4^4$$

e depois assim

$$4^5 = 3 \cdot 4^4 + \underbrace{3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3 + 1}_{4^4}$$

Agora, já é bem fácil ver que tirando 1, aquilo que sobra é divisível por 3.

Legal!

Sim, mas essa não é a única maneira de ver a repetição.

Quer dizer, a gente também pode ver a repetição desmontando.

Para isso, a gente olha para o 4ⁿ.

Mas ...

Sim, o *n* é um “*número qualquer*” ...

E a gente pode raciocinar com ele também.

Quer dizer, o 4ⁿ é um quadrado que a gente pode desmontar assim

$$4^n = 4 \cdot 4^{n-1}$$

e depois reescrever assim

$$4^n = 3 \cdot 4^{n-1} + 4^{n-1}$$

Daí, a gente desmonta o 4ⁿ⁻¹

$$4^n = 3 \cdot 4^{n-1} + 3 \cdot 4^{n-2} + 4^{n-2}$$

Já deu pra ver o que está acontecendo, não é?

Quer dizer, a gente pode continuar desmontando a potência de 4 que aparece no fim.

Porque as potências de 4 são como uma cebola.

Ou melhor, as potências de 4 são como um rocambole — *(porque a cebola não tem caroço, mas o rocambole tem ...)*

Daí, desenrolando o rocambole até o fim a gente vê o caroço — *(ou o recheio)*

$$4^n = 3 \cdot 4^{n-1} + \dots + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3 + 1$$

Sim! o caroço é o 1!

Pois é, daí ao tirar o caroço do rocambole, a gente vê que aquilo que sobra é divisível por 3

$$4^n - 1 = 3 \cdot 4^{n-1} + \dots + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3$$

Legal!

Sim, mas isso é uma coisa que a gente já sabia.

Quer dizer, vamos escrever a coisa ao contrário

$$3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + \dots + 3 \cdot 4^{n-1} = 4^n - 1$$

Daí, a gente coloca o 3 em evidência

$$3 \cdot \left[1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{n-1} \right] = 4^n - 1$$

E daí a gente passa o 3 para o outro lado

$$1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{3}$$

Essa é a fórmula da soma da PG!

É isso aí ...