

Vários truques de desmontação

Vamos olhar outra vez para isso aqui

$$\rightarrow 2^{2n} - 1 \text{ é sempre divisível por } 3$$

E daí, concentrando a atenção aqui

$$2^{2n} - 1$$

a gente pode pensar que alguém chegou aqui depois de usar o truque do peteleco

$$2^{2n} - 1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2n-1}$$

— (*sim, isso é mais um truque de desmontação ...*)

Daí, o que o livro está dizendo é que essa soma é sempre divisível por 3.

Será?

Bom, vamos olhar para cada termo.

Ou melhor, vamos olhar para o resto de cada termo na divisão por 3

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2^{2n} - 1 & = & 1 & + & 2^1 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & 2^4 & + & \dots & + & 2^{2n-1} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & 2 & & 1 & & \dots & & \end{array}$$

Sim! a coisa entra em repetição — (*é sempre assim, ou será que não?*)

Daí a gente nota que nas potências pares o resto é 1, e nas potências ímpares o resto é 2

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2^{2n} - 1 & = & 1 & + & 2^1 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \dots & + & 2^{2n-2} & + & 2^{2n-1} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \dots & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & 2 & & \dots & & 1 & & 2 \end{array}$$

E daí, a gente nota que ao somar os pares de termos consecutivos, o resto sempre dá 3 — (*o que é o mesmo que resto 0*)

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2^{2n} - 1 & = & 1 & + & 2^1 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \dots & + & 2^{2n-2} & + & 2^{2n-1} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \dots & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & 2 & & \dots & & 1 & & 2 \\ & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \\ & & 3 & & & & 3 & & & & & & 3 & & \end{array}$$

E aqui já dá pra ver que a coisa toda é divisível por 3.

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de ver as coisas.

Quer dizer, vamos dar um passo atrás e olhar outra vez para isso

$$2^{2n} - 1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2n-2} + 2^{2n-1}$$

A gente pode pensar que alguém chegou aqui depois de usar o truque do peteleco

Daí, a esperteza dessa vez é reescrever a coisa assim

$$2^{2n} - 1 = 1 + 2 \cdot 1 + 2^2 + 2 \cdot 2^2 + \dots + 2^{2n-2} + 2 \cdot 2^{2n-2}$$

e depois assim

$$2^{2n} - 1 = (1+2) \cdot 1 + (1+2) \cdot 2^2 + \dots + (1+2) \cdot 2^{2n-2}$$

e depois assim

$$2^{2n} - 1 = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^{2n-2}$$

Pronto! aqui a gente já pode ver outra vez que $2^{2n} - 1$ é sempre divisível por 3.

Legal.

Mas, essa não é a única maneira de ver as coisas.

Quer dizer, vamos olhar mais uma vez para isso

$$2^{2n} - 1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2n-1}$$

o que a gente reescreve assim

$$2^{2n} - 1 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + \dots + 1 \cdot 2^{2n-1}$$

O que é isso?

Bom, a gente pode pensar que isso é um número na base 2

$$2^n - 1 = \underbrace{(111 \dots 111)}_{2n}_2$$

Agora, a gente quer ver que isso é divisível por 3.

Ora, então basta aplicar a regra do 3 na base 2.

Que regra é essa?

Bom, o 3 é o “onze” da base 2.

Logo, nós usamos a regra do 11

- Some os dígitos das posições ímpares
- some os dígitos das posições pares
- e subtraia uma coisa da outra
- Se aquilo que der for divisível por $(11)_2$
- então o seu número é divisível por $(11)_2$

Daí, aplicando essa regra a gente obtém o seguinte

$$\underbrace{[1 + 1 + \dots + 1 + 1]}_n - \underbrace{[1 + 1 + \dots + 1 + 1]}_n = 0$$

Logo, $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de ver as coisas.

Quer dizer, vamos colocar outra vez a atenção no termo

$$2^{2n} - 1$$

E vamos lembrar que isso é igual a

$$4^n - 1$$

Daí a gente pergunta: *O que é isso?*

Bom, a resposta é: depende de como se olha ...

Dessa vez, a gente quer olhar a coisa na base 4.

E para ver o que é isso na base 4, primeiro a gente nota que

$$10^n = \text{um } n\text{-lhão}$$

— (*i.e., 1 seguido por n zeros*)

Daí que, o 4^n é o um n -lhão da base 4.

Agora, a gente pode reescrever a coisa assim

$$4^n - 1 = (100 \dots 000)_4 - 1$$

E fazendo essa continha, a gente obtém o seguinte

$$4^n - 1 = (333 \dots 333)_4$$

E aqui já dá pra ver outra vez que a coisa é divisível por 3.