

Generalização

A gente já viu muitas vezes que $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

Então agora a gente pode tentar ver outras coisas.

E a gente pode utilizar qualquer um dos nossos caminhos de raciocínio para ver isso — (*contanto que a coisa seja parecida*)

Por exemplo, considere a expressão

$$2^{3n} - 1$$

Aqui já não é difícil reescrever a coisa assim

$$(2^3)^n - 1$$

e depois assim

$$8^n - 1$$

Nesse ponto, a gente reconhece o um n-lhão da base 8.

Daí, a gente reescreve a coisa assim

$$8^n - 1 = (100 \dots 000)_8 - 1$$

e faz a continha para obter

$$(777 \dots 777)_8$$

Pronto, nós acabamos de descobrir que

$$\rightarrow 2^{3n} - 1 \text{ é sempre divisível por } 7$$

A seguir, a gente olha para a expressão

$$2^{4n} - 1$$

E daí, a gente raciocina assim

$$\begin{aligned} 2^{4n} - 1 &= (2^4)^n - 1 \\ &= 16^n - 1 \\ &= (100 \dots 000)_{16} - 1 \\ &= ((15)(15)(15) \dots (15)(15)(15))_{16} \end{aligned}$$

o que já mostra que a coisa é divisível por 15.

Logo, nós descobrimos que

$$\rightarrow 2^{4n} - 1 \text{ é sempre divisível por } 15$$

Aqui já dá pra notar que a coisa entrou em repetição.

Para ver o padrão repetitivo, a gente reescreve a coisa assim

$$\rightarrow 2^{4n} - 1 \text{ é sempre divisível por } 2^4 - 1$$

E agora, a gente escreve a repetição assim

$$\rightarrow 2^{kn} - 1 \text{ é sempre divisível por } 2^k - 1$$