

Mais divisibilidade

Mas isso ainda não é tudo.

Porque um pouquinho mais adiante no livro, a gente encontra o seguinte

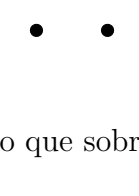
$$\rightarrow 5^n - 2^n \text{ é sempre divisível por } 3$$

E agora?

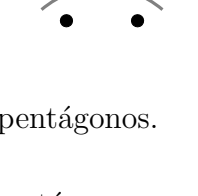
Como é que a gente vê isso?

Bom, a resposta é sempre: desmontando.

E a gente começa desmontando o 5

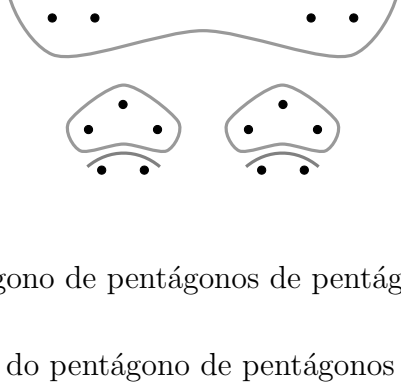


E daí a gente vê que tirando 2 do pentágono, aquilo que sobra é divisível por 3



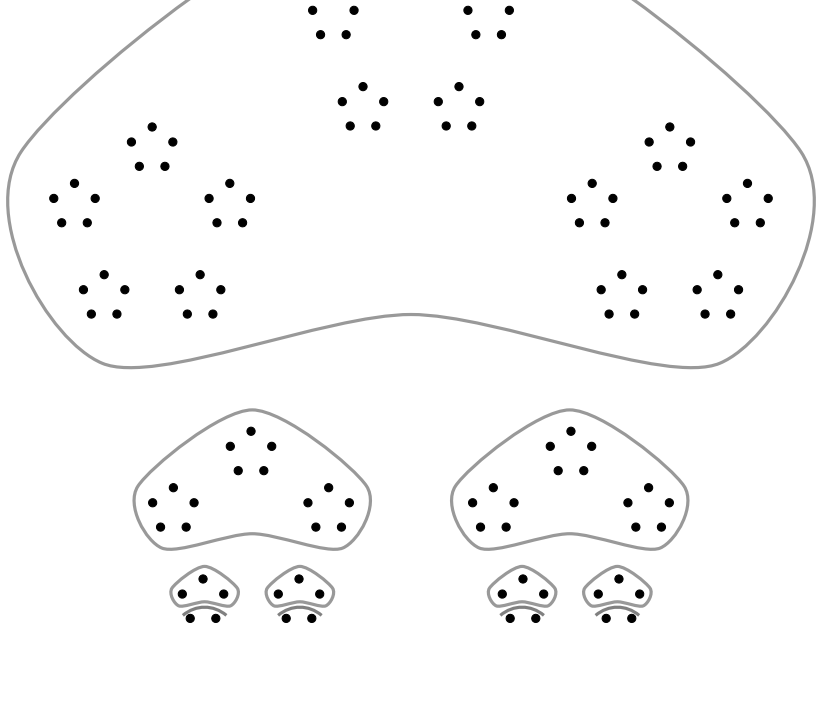
Daí a gente lembra que o 5² é um pentágono de pentágonos.

E vê que tirando duas vezes 2 do pentágono de pentágonos, aquilo que sobra é divisível por 3



Daí, a gente lembra que o 5³ é um pentágono de pentágonos de pentágonos.

E vê que tirando duas vezes duas vezes 2 do pentágono de pentágonos de pentágonos, aquilo que sobra é divisível por 3



E por aí vai ...

Certo.

Mas porque funciona?

Bom, vamos começar com o pentágono de pentágonos de pentágonos

$$5^3$$

Daí a gente desmonta assim

$$5^3 = 5 \cdot 5^2$$

e depois assim

$$5^3 = 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^2$$

A seguir a gente foca no segundo 5².

Daí a gente desmonta ele assim

$$5^3 = 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot (5 \cdot 5)$$

e depois assim

$$5^3 = 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot (3 \cdot 5 + 2 \cdot 5)$$

Finalmente, a gente foca no segundo 5 — (*dentro dos parênteses*)

Daí a gente desmonta ele assim

$$5^3 = 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot (3 \cdot 5 + 2 \cdot (3 + 2))$$

Agora, a gente pode fazer as multiplicações

$$5^3 = 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot (3 \cdot 5 + 2 \cdot (3 + 2))$$
$$\underbrace{\hspace{10em}}_{3 \cdot 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2^2 + 2^3}$$

o que dá

$$5^3 = 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2^2 + 2^3$$

E passando o 2³ para o outro lado

$$5^3 - 2^3 = 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2^2$$

a gente vê que 5³ - 2³ é divisível por 3.

Na prática, esse raciocínio é igual à figura — (*you consegue ver?*)

E agora a gente pode repetir ele para o 5⁴.

Quer dizer, a gente começa desmontando assim

$$5^4 = 5 \cdot 5^3$$

e depois assim

$$5^4 = 3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^3$$

A seguir, a gente foca no segundo 5³.

E substitui ele pela expressão que a gente encontrou mais acima

$$5^4 = 3 \cdot 5^3 + 2 \cdot [3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2^2 + 2^3]$$

Fazendo a multiplicação, a gente obtém

$$5^4 = 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2^3 + 2^4$$

E passando o 2⁴ para o outro lado

$$5^4 - 2^4 = 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2^3$$

a gente vê que 5⁴ - 2⁴ é divisível por 3.

Quer dizer, aqui a gente já viu a repetição.

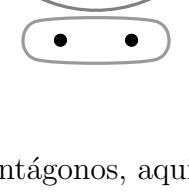
E assim já dá pra ver que

$$\rightarrow 5^n - 2^n \text{ é sempre divisível por } 3$$

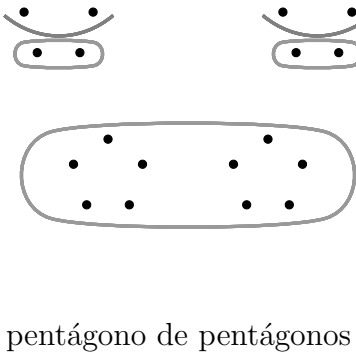
Mas isso ainda não é tudo.

Porque a gente também pode fazer o contrário.

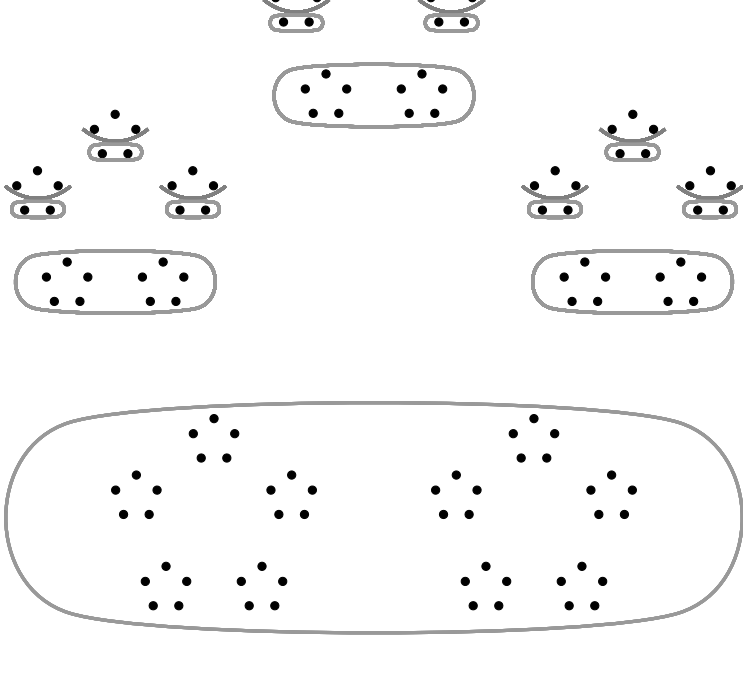
Quer dizer, se a gente tira 3 do pentágono, aquilo que sobra é divisível por 2



E se a gente tira três vezes 3 do pentágono de pentágonos, aquilo que sobra é divisível por 2



E se a gente tira três vezes três vezes 3 do pentágono de pentágonos de pentágonos, aquilo que sobra é divisível por 2



Aqui a gente já viu a repetição.

E assim já dá pra ver que

$$\rightarrow 5^n - 3^n \text{ é sempre divisível por } 2$$

Quer dizer, o princípio da coisa é o mesmo.

E ele funciona sempre.

Por exemplo, agora a gente vai ver que

$$\rightarrow 7^n - 4^n \text{ é sempre divisível por } 3$$

Bom, o 7 é o heptágono.

E tirando 4 do heptágono, aquilo que sobra é divisível por 3

$$7 - 4 = 3$$

A seguir, a gente nota que o 7² é o heptágono de heptágonos

$$7^2 = 7 \cdot 7$$

Daí, a gente desmonta a coisa assim

$$7^2 = 3 \cdot 7 + 4 \cdot 7$$

reescreve a coisa assim

$$7^2 = 3 \cdot 7 + 4 \cdot (3 + 4)$$

e depois assim

$$7^2 = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 4^2$$

e depois assim

$$7^2 - 4^2 = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 4$$

E aqui a gente vê que tirando quatro vezes 4 do heptágono de heptágonos, aquilo que sobra é divisível por 3.

A seguir, a gente nota que o 7³ é o heptágono de heptágonos de heptágonos

$$7^3 = 7 \cdot 7^2$$

Daí, a gente desmonta a coisa assim

$$7^3 = 3 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7^2$$

E substitui o segundo 7² pela expressão que a gente encontrou antes

$$7^3 = 3 \cdot 7^2 + 4 \cdot [3 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 4^2]$$

o que a gente reescreve assim

$$7^3 = 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 4 \cdot 7 + 3 \cdot 4^2 + 4^3$$

e depois assim

$$7^3 - 4^3 = 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 4 \cdot 7 + 3 \cdot 4^2$$

E aqui a gente vê que tirando quatro vezes quatro vezes 4 do heptágono de heptágonos de heptágonos, aquilo que sobra é divisível por 3.

Aqui a gente já viu a repetição.

E assim já dá pra ver que

$$\rightarrow 7^n - 4^n \text{ é sempre divisível por } 3$$

Quer dizer, o princípio da coisa é sempre o mesmo — (*na figura ou por escrito*)

Então agora a gente pode escrever

$$\rightarrow a^n - b^n \text{ é sempre divisível por } a - b$$