

Matemática Discreta

aula 06: Manipulando a divisibilidade

1 Introdução

Na aula passada nós aprendemos uma regra de divisibilidade para potências

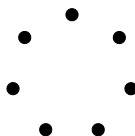
- $3^n - 1$ é sempre divisível por 2
- $4^n - 1$ é sempre divisível por 3
- $5^n - 1$ é sempre divisível por 4
- e por aí vai ...

Daí, nós generalizamos a coisa para qualquer subtração de potências

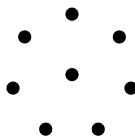
- $5^n - 2^n$ é sempre divisível por 3
- $7^n - 3^n$ é sempre divisível por 4
- $9^n - 4^n$ é sempre divisível por 5
- e por aí vai ...

Hoje nós queremos trabalhar com somas.

Para isso a gente começa notando que o 7 é um heptágono



E que somando 1 ao heptágono, aquilo que dá é divisível por 8



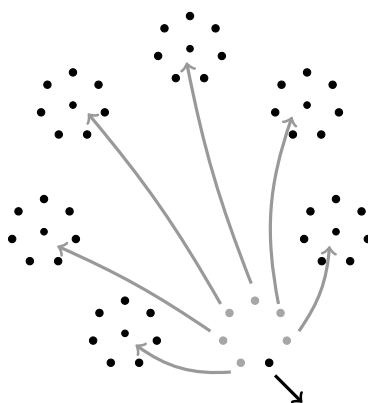
Mas, a coisa não funciona para o heptágono de heptágonos — (o 7^2)

Porque

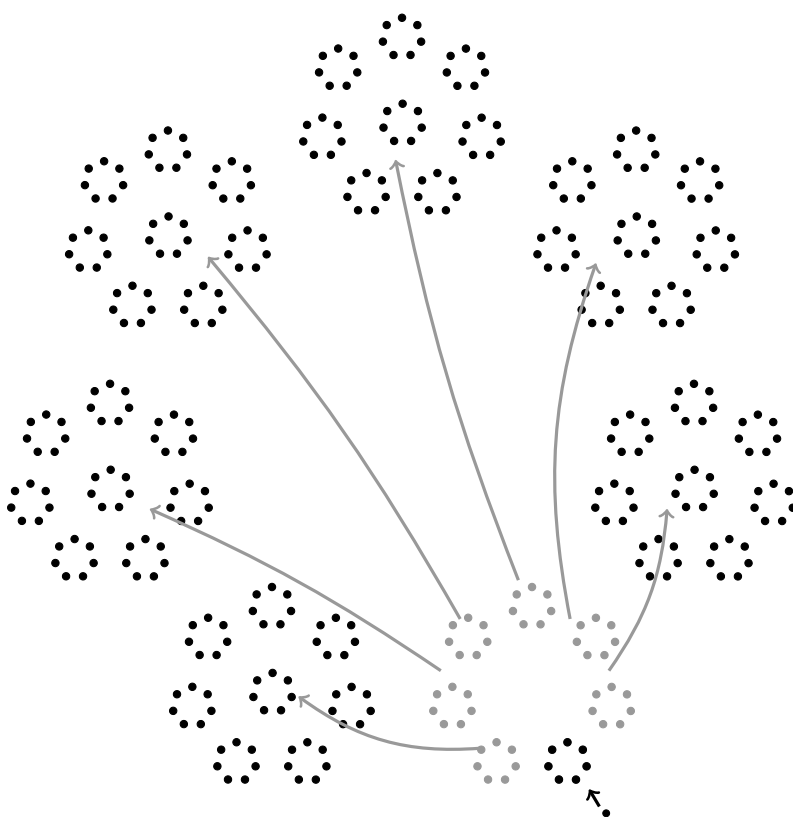
$$7^2 + 1 = 50$$

o que não é divisível por 8.

Só que, tirando 1 a coisa passa a funcionar — (*i.e., aquilo que sobra é divisível por 8*)



E daí, com o heptágono de heptágonos de heptágonos, a gente soma 1 outra vez



Quer dizer, dessa vez a gente descobriu que os números

$$7^1 + 1, \quad 7^3 + 1, \quad 7^5 + 1, \quad 7^7 + 1, \quad \dots$$

são todos divisíveis por 8.

E que os números

$$7^2 - 1, \quad 7^4 - 1, \quad 7^6 - 1, \quad 7^8 - 1, \quad \dots$$

também são todos divisíveis por 8.

Mas, porque é que a coisa funciona?

Bom, vamos começar com o caso par, que é mais fácil

$$7^2 + 1$$

Daí, a gente reescreve a coisa assim

$$(7^2)^n - 1$$

e depois assim

$$49^n - 1$$

Daí, a gente lembra da regra da aula passada

$$\rightarrow 49^n - 1 \text{ é sempre divisível por } 48$$

Mas, 48 é divisível por 8.

Então, $49^n - 1$ também é divisível 8.

O que nos dá

$$\rightarrow 7^{2n} - 1 \text{ é sempre divisível por } 8$$

Certo.

Agora a gente considera o caso ímpar

$$7^{2n+1} + 1$$

Dessa vez, a gente reescreve a coisa assim

$$7 \cdot 7^{2n} + 1$$

E aqui é a hora para uma pequena esperteza.

Quer dizer, a gente desmonta o 1 assim

$$1 = 8 - 7$$

Daí, a gente reescreve a nossa expressão assim

$$7 \cdot 7^{2n} + 8 - 7$$

E coloca o 7 em evidência

$$7 \cdot (7^{2n} - 1) + 8$$

Aqui a gente nota que

$$7 \cdot \underbrace{(7^{2n} - 1)}_{\text{div. p/ } 8} + \underbrace{8}_{\text{div. p/ } 8}$$

O que nos dá

$$\rightarrow 7^{2n+1} + 1 \text{ é sempre divisível por } 8$$

2 Divisibilidade de potências

Agora, a gente tem mais uma regra para a divisibilidade de potências

- $3^{2n} - 1$ e $3^{2n+1} + 1$ são sempre divisíveis por 4
- $4^{2n} - 1$ e $4^{2n+1} + 1$ são sempre divisíveis por 5
- $5^{2n} - 1$ e $5^{2n+1} + 1$ são sempre divisíveis por 6
- e por aí vai ...

Mas para dar o próximo passo, a gente precisa entender melhor as coisas.

Para isso, a gente olha para essa regra outra vez

$$\rightarrow 4^n - 1 \text{ é sempre divisível por } 3$$

E pergunta outra vez: *Porque?*

Bom, vamos raciocinar.

E na matemática, raciocinar é desmontar.

Então, a gente começa desmontando o 4 assim

$$4 = 3 + 1$$

Daí, a gente reescreve a nossa expressão assim

$$(3 + 1)^n - 1$$

E aqui a intuição já começa a imaginar as coisas ...

Mas, vamos um pouco mais devagar.

Quer dizer, vamos começar observando que aquilo que está dentro dos parênteses é um **sobra 1**
— (na divisão por 3)

$$\underbrace{(3 + 1)^n}_{\text{sobra 1}} - 1$$

Daí, a gente pode perguntar o que acontece quando a gente tira as potências de um **sobra 1**.

Bom, vamos ver.

Quer dizer, a gente começa com o **sobra 1** ao quadrado

$$\begin{aligned}(3 + 1)^2 &= (3 + 1) \cdot (3 + 1) \\ &= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1^2\end{aligned}$$

A esperteza nesse ponto é reescrever a coisa assim

$$(3 + 1)^2 = 3 \cdot (3 + 2) + 1$$

Sim! isso é um **sobra 1** — (*na divisão por 3*)

$$(3 + 1)^2 = 3K + 1$$

Agora, a gente olha para o **sobra 1** ao cubo

$$(3 + 1)^3$$

E a esperteza dessa vez é reescrever a coisa assim

$$\begin{aligned}(3 + 1)^3 &= (3 + 1)^2 \cdot (3 + 1) \\&= (3K + 1) \cdot (3 + 1) \\&= 3^2K + 3k + 3 \cdot 1 + 1^2 \\&= 3 \cdot [3K + k + 1] + 1 \\&= 3L + 1\end{aligned}$$

— (*i.e., um **sobra 1***)

Então, a gente acabou de descobrir que

→ *as potências do **sobra 1** sempre dão um **sobra 1***

Agora, a gente pode olhar para isso aqui outra vez

$$(3 + 1)^n = 1$$

e reescrever a coisa assim

$$3K + 1 = 1$$

e depois assim

$$3K$$

E assim a gente vê que a coisa é sempre divisível por 3.

Legal, não é?

Agora, a gente olha outra vez para isso

→ $4^{2n} - 1$ e $4^{2n+1} + 1$ são sempre divisíveis por 5

E pergunta outra vez: *Porque?*

Bom, para entender porque a gente precisa desmontar outra vez o 4.

E dessa vez, a gente desmonta o 4 assim

$$4 = 5 - 1$$

Sim! o 4 é um **falta 1** — (*na divisão por 5*)

Agora, a gente precisa entender o que acontece quando a gente tira potências de um **falta 1**.

A gente começa com o 1 ao quadrado

$$\begin{aligned}(5 - 1)^2 &= (5 - 1) \cdot (5 - 1) \\&= 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 1 + 1^2 \\&= 5 \cdot (5 - 2) + 1 \\&= 5K + 1\end{aligned}$$

Sim, o **falta 1** ao quadrado é um **sobra 1**.

Agora, a gente olha para o **falta 1** ao cubo

$$\begin{aligned}(5 - 1)^3 &= (5 - 1)^2 \cdot (5 - 1) \\&= (5K + 1) \cdot (5 - 1) \\&= 5^2K - 5k + 5 \cdot 1 - 1 \\&= 5 \cdot [5K - k + 1] - 1 \\&= 5L - 1\end{aligned}$$

Sim, o **falta 1** ao cubo dá um **falta 1**.

E então, já deu pra ver o que está acontecendo?

Pois é, dessa vez a regra é a seguinte

*→ as potências pares do **falta 1** sempre dão um **sobra 1**
as potências ímpares do **falta 1** sempre dão um **falta 1***

Agora, a gente olha outra vez para isso

$$4^{2n} - 1$$

Daí, a gente reescreve a coisa assim

$$(5 - 1)^{2n} - 1$$

e depois assim

$$5K + 1 - 1$$

e depois assim

$$5K$$

E assim a gente vê que a coisa é sempre divisível por 5.

A seguir, a gente olha outra vez para isso

$$4^{2n+1} + 1$$

Daí, a gente reescreve a coisa assim

$$(5 - 1)^{2n+1} + 1$$

e depois assim

$$5K - 1 + 1$$

e depois assim

$$5K$$

E assim a gente vê que a coisa é sempre divisível por 5.

Legal, não é?

Sim, mas ainda tem mais coisa pra gente ver.

Quer dizer, vamos olhar outra vez para isso

$$\rightarrow 5^n - 2^n \text{ é sempre divisível por } 3$$

E vamos perguntar outra vez: *Porque?*

Bom, vamos raciocinar.

Quer dizer, vamos desmontar.

E dessa vez, a gente desmonta o 5 assim

$$5 = 3 + 2$$

Sim, o 5 é um **sobra 2** — (*na divisão por 3*)

Daí a gente quer saber o que acontece quando a gente tira potências de um **sobra 2**.

Bom, vamos ver.

Quer dizer, a gente começa com o **sobra 2** ao quadrado

$$\begin{aligned} (3 + 2)^2 &= (3 + 2) \cdot (3 + 2) \\ &= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2^2 \\ &= 3K + 2^2 \end{aligned}$$

Sim! o **sobra 2** ao quadrado é um **sobra 2**².

Agora, a gente olha para o **sobra 2** ao cubo

$$\begin{aligned} (3 + 2)^3 &= (3 + 2)^2 \cdot (3 + 2) \\ &= (3K + 2^2) \cdot (3 + 2) \\ &= 3^2K + 3k \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 2^3 \\ &= 3L + 2^3 \end{aligned}$$

Sim, o **sobra 2** ao cubo é um **sobra 2^3** .

Já deu pra ver o que está acontecendo, não é?

Então agora, a gente pode olhar outra vez para isso aqui

$$5^n - 2^n$$

Daí, a gente reescreve a coisa assim

$$(3 + 2)^n - 2^n$$

e depois assim

$$3K + 2^n - 2^n$$

e depois assim

$$3K$$

E assim a gente vê que a coisa é sempre divisível por 3.

Legal, não é?

Sim, mas tudo isso que a gente viu são coisas que a gente já sabia.

Agora, está na hora de descobrir alguma coisa nova.

Para isso, a gente escreve o seguinte

$$5^n + 2^n$$

E então, qual é o seu palpite?

Isso é divisível pelo que?

Bom, o palpite é que isso é divisível por 7 — (*mas pode ser que dependa da paridade do n ...*)

Para verificar o palpite, a gente desmonta o 5 assim

$$5 = 7 - 2$$

Sim! o 5 é um **falta 2** — (*na divisão por 7*)

E agora, a gente precisa ver o que acontece quando a gente tira potências de um **falta 2**.

A gente começa com o **falta 2** ao quadrado

$$\begin{aligned}(7 - 2)^2 &= (7 - 2) \cdot (7 - 2) \\ &= 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 2 + 2^2 \\ &= 7K + 2^2\end{aligned}$$

Sim! o **falta 2** ao quadrado é um **sobra 2^2** .

Agora, a gente olha para o **falta 2** ao cubo

$$\begin{aligned}
 (7 - 2)^3 &= (7 - 2)^2 \cdot (7 - 2) \\
 &= (7K + 2^2) \cdot (7 - 2) \\
 &= 7^2K - 7k \cdot 2 + 7 \cdot 2^2 - 2^3 \\
 &= 7L - 2^3
 \end{aligned}$$

Sim, o **falta 2** ao cubo é um **falta 2**³.

Já deu pra ver o que está acontecendo, não é?

Então agora, a gente olha outra vez pra isso

$$5^n + 2^n$$

Daí, a gente reescreve a coisa assim

$$(7 - 2)^n + 2^n$$

Aqui, a gente precisa saber se o n é par ou ímpar.

Nesse caso, a gente precisa que o n seja ímpar — (*porque?*)

Então, a gente assume que o n é ímpar.

Daí, como o n é ímpar, a gente pode reescrever a coisa assim

$$7K - 2^n + 2^n$$

e depois assim

$$7K$$

E assim a gente vê que a coisa é sempre divisível por 7 — (*quando n é ímpar*)

Mas, e quando n é par?

Bom, quando n é par a gente olha para a subtração

$$5^n - 2^n$$

Daí, a gente reescreve a coisa assim

$$(7 - 2)^n - 2^n$$

e depois assim

$$7K + 2^n - 2^n$$

e depois assim

$$7K$$

E assim a gente vê que a coisa é sempre divisível por 7 — (*quando n é par*)

Quer dizer, a gente descobriu mais uma regra de divisibilidade para potências

- $5^{2n} - 2^{2n}$ e $5^{2n+1} + 2^{2n}$ são sempre divisíveis por 7
- $6^{2n} - 3^{2n}$ e $6^{2n+1} + 3^{2n}$ são sempre divisíveis por 9
- $7^{2n} - 4^{2n}$ e $7^{2n+1} + 4^{2n}$ são sempre divisíveis por 11
- e por aí vai ...

3 Manipulando a divisibilidade

Agora que nós temos as nossas regras de divisibilidade para potências, a gente pode ver que as coisas que estão no livro de matemática discreta não são tão difíceis assim

Nós vamos começar com isso aqui

$$\rightarrow 5^{2n} - 1 \text{ é sempre divisível por 3}$$

Bom, isso é uma potência de 5.

E o 5 pode ser desmontado assim

$$5 = 6 - 1$$

Logo, 5^{2n} é um **sobra 1** — (*na divisão por 6*)

Agora, a gente pode ver que

$$5^{2n} - 1 = 6K + 1 - 1 = 6K$$

é sempre divisível por 6.

E tudo o que é divisível por 6 também é divisível por 3.

Legal.

Mas, essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, vamos olhar outra vez para isso

$$5^{2n} - 1$$

Daí, a gente reescreve a coisa assim

$$(5^2)^n - 1$$

e depois assim

$$25^n - 1$$

e depois assim

$$(3 \cdot 8 + 1)^n - 1$$

e depois assim

$$3K + 1 - 1$$

e depois assim

$$3K$$

E assim a gente vê que a coisa é sempre divisível por 3.

A seguir nós vamos ver mais exemplos.

Exemplos

a. Mais divisibilidade por 3

$\rightarrow 7^n + 2$ é sempre divisível por 3

Bom, aqui a gente desmonta o 7

$$(2 \cdot 3 + 1)^n + 2$$

E nota que o termo entre parênteses é um **sobra 1** — (na divisão por 3)

Daí, a gente reescreve a coisa assim

$$3K + 1 + 2$$

e depois assim

$$3K + 3$$

E assim a gente vê que a coisa é sempre divisível por 3.

◇

b. Ainda mais divisibilidade por 3

Virando algumas páginas do livre de matemática discreta, a gente encontra o seguinte

$\rightarrow \frac{10^n + 5}{3} + 4^{n+2}$ é sempre um número inteiro divisível por 3

E agora?

Bom, agora a gente raciocina por etapas.

Quer dizer, a gente começa focando a atenção na fração

$$\frac{10^n + 5}{3}$$

E a esperteza é desmontar o 10 assim

$$\frac{(9 + 1)^n + 5}{3}$$

Sim, nós temos um **sobra 1** dentro dos parênteses — (na divisão por 9)

Logo, a gente pode reescrever a coisa assim

$$\frac{9K + 1 + 5}{3}$$

e depois assim

$$\frac{9K + 6}{3}$$

e depois assim

$$3K + 2$$

Agora, a gente coloca isso de volta na nossa expressão

$$3K + 2 + 4^{n+2}$$

Daí, a gente desmonta o 4

$$3K + 2 + (3 + 1)^{n+2}$$

E reescreve a coisa assim

$$3K + 2 + 3L + 1$$

e depois assim

$$3K + 3L + 3$$

E assim a gente vê que a coisa é sempre um número inteiro divisível por 3.

◇

c. Divisibilidade por 4

$\rightarrow 6 \cdot 7^n - 2 \cdot 3^n$ é sempre divisível por 4

Bom, aqui a esperteza é reescrever a coisa assim

$$4 \cdot 7^n + 2 \cdot 7^n - 2 \cdot 3^n$$

Daí, como o primeiro termo já é divisível por 4, a gente pode esquecer dele

$$2 \cdot 7^n - 2 \cdot 3^n$$

O próximo passo é colocar o 2 em evidência

$$2 \cdot (7^n - 3^n)$$

E aqui a gente já pode aplicar a nossa regra de divisibilidade para potências

$$2 \cdot \underbrace{(7^n - 3^n)}_{\text{div. p/ 4}}$$

◇

d. Divisibilidade por 5

$\rightarrow 3^{2n} + 4^{n+1}$ é sempre divisível por 5

Bom, aqui é preciso raciocinar um pouquinho.

E na matemática, raciocinar significa: desmontar e reescrever.

Então, a gente reescreve assim

$$(3^2)^n + 4 \cdot 4^n$$

e depois assim

$$9^n + 4 \cdot 4^n$$

Daí, a esperteza é desmontar o primeiro 4 assim

$$9^n + (5 - 1) \cdot 4^n$$

e depois reescrever assim

$$9^n + 5 \cdot 4^n - 4^n$$

O termo do meio já é divisível por 5, e a gente pode esquecer dele

$$9^n - 4^n$$

E aqui a gente já vê que a coisa é sempre divisível por 5 — (*pela regra de divisibilidade para potências*)

◇

e. Divisibilidade por 7

$$\rightarrow 2^{n+2} + 3^{2n-1} \text{ é sempre divisível por 7}$$

Bom, aqui a gente começa reescrevendo assim

$$2^2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^{2n}$$

e depois assim

$$4 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^{2n}$$

Daí, a gente desmonta assim

$$2^n + 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^{2n}$$

E reescreve a coisa assim

$$2^n + 3 \cdot (2^n + 3^{2n})$$

e depois assim

$$2^n + 3 \cdot (2^n + (3^2)^n)$$

e depois assim

$$2^n + 3 \cdot (2^n + 9^n)$$

e depois assim

$$2^n + 3 \cdot (2^n + (7 + 2)^n)$$

e depois assim

$$2^n + 3 \cdot (2^n + 7K + 2^n)$$

e depois assim

$$2^n + 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 7K + 3 \cdot 2^n$$

e depois assim

$$7 \cdot 2^n + 3 \cdot 7K$$

E assim a gente vê que a coisa é sempre divisível por 7.

◇

f. Divisibilidade por 43

$\rightarrow 6^{n+1} + 7^{2n-1}$ é sempre divisível por 43

Bom, aqui a esperteza é desmontar assim

$$6 \cdot 6^n + 7 \cdot 7^{2n-2}$$

Daí, a gente reescreve a coisa assim

$$6 \cdot 6^n + 7 \cdot (7^2)^{n-1}$$

e depois assim

$$6 \cdot 6^n + 7 \cdot 49^{n-1}$$

e depois assim

$$6 \cdot 6^n + 7 \cdot (43 + 6)^{n-1}$$

e depois assim

$$6 \cdot 6^n + 7 \cdot (43K + 6^{n-1})$$

e depois assim

$$6 \cdot 6^n + 7 \cdot 43K + 7 \cdot 6^{n-1}$$

O termo do meio já é divisível por 43, e a gente pode esquecer dele

$$6 \cdot 6^n + 7 \cdot 6^{n-1}$$

Nesse ponto, a gente dá mais uma desmontadinha

$$6 \cdot 6 \cdot 6^{n-1} + 7 \cdot 6^{n-1}$$

E reescreve a coisa assim

$$36 \cdot 6^{n-1} + 7 \cdot 6^{n-1}$$

e depois assim

$$43 \cdot 6^{n-1}$$

E assim a gente vê que a coisa é sempre divisível por 43.

◇

g. Desafio

Algumas páginas mais adiante no livro de matemática discreta, a gente encontra uma coisa curiosa

$\rightarrow$ Os números abaixo são todos divisíveis por 53

$$1007, 10017, 100117, 1001117, \dots$$

Será?

Bom, vamos raciocinar.

E na matemática, isso significa desmontar.

Para fazer isso, a gente olha para o número

$$\underbrace{100111\dots111}_n 7$$

E desmonta ele assim

$$\underbrace{10000\dots00}_{n+3} + 10 \times \underbrace{111\dots111}_n + 7$$

E reescreve assim

$$10^{n+3} + 10 \cdot \underbrace{111\dots111}_n + 7$$

A seguir, o truque sujo é reescrever o termo do meio assim

$$10^{n+3} + 10 \cdot \frac{\overbrace{999\dots999}^n}{9} + 7$$

e depois assim

$$10^{n+3} + 10 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 7$$

e depois assim

$$10^{n+3} + \frac{10^{n+1} - 10}{9} + 7$$

e depois assim

$$100 \cdot 10^{n+1} + \frac{10^{n+1} - 10}{9} + 7$$

e depois assim

$$\frac{900 \cdot 10^{n+1} + 10^{n+1} - 10 + 63}{9}$$

e depois assim

$$\frac{901 \cdot 10^{n+1} + 53}{9}$$

Nesse ponto, a gente nota que

$$901 = 53 \times 17$$

E reescreve a coisa assim

$$\frac{53 \cdot 17 \cdot 10^{n+1} + 53}{9}$$

e depois assim

$$\frac{53 \cdot (17 \cdot 10^{n+1} + 1)}{9}$$

e depois assim

$$\frac{53 \cdot \left(18 \cdot 10^{n+1} - 10^{n+1} + 1 \right)}{9}$$

e depois assim

$$\frac{53 \cdot \left(18 \cdot 10^{n+1} - (10^{n+1} - 1) \right)}{9}$$

e depois assim

$$\frac{53 \cdot \left(18 \cdot 10^{n+1} - 999\dots999 \right)}{9}$$

e depois assim

$$53 \cdot \left(2 \cdot 10^{n+1} - 111\dots111 \right)$$

E assim a gente vê que todos os números abaixo são divisíveis por 53

$$1007 + 10017 + 100117 + 1001117 + \dots$$

◇