

Uma nova regra de divisibilidade para potências

Na aula passada nós aprendemos uma regra de divisibilidade para potências

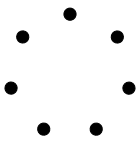
- $3^n - 1$ é sempre divisível por 2
- $4^n - 1$ é sempre divisível por 3
- $5^n - 1$ é sempre divisível por 4
- e por aí vai ...

Daí, nós generalizamos a coisa para qualquer subtração de potências

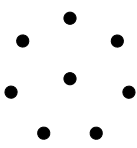
- $5^n - 2^n$ é sempre divisível por 3
- $7^n - 3^n$ é sempre divisível por 4
- $9^n - 4^n$ é sempre divisível por 5
- e por aí vai ...

Hoje nós queremos trabalhar com somas.

Para isso a gente começa notando que o 7 é um heptágono



E que somando 1 ao heptágono, aquilo que dá é divisível por 8



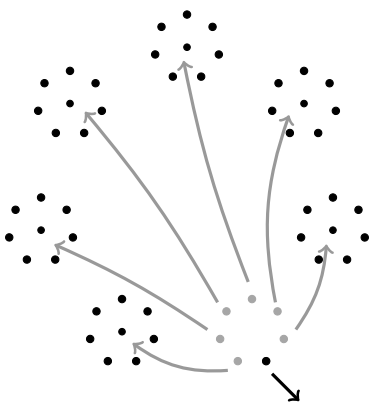
Mas, a coisa não funciona para o heptágono de heptágonos — (o 7^2)

Porque

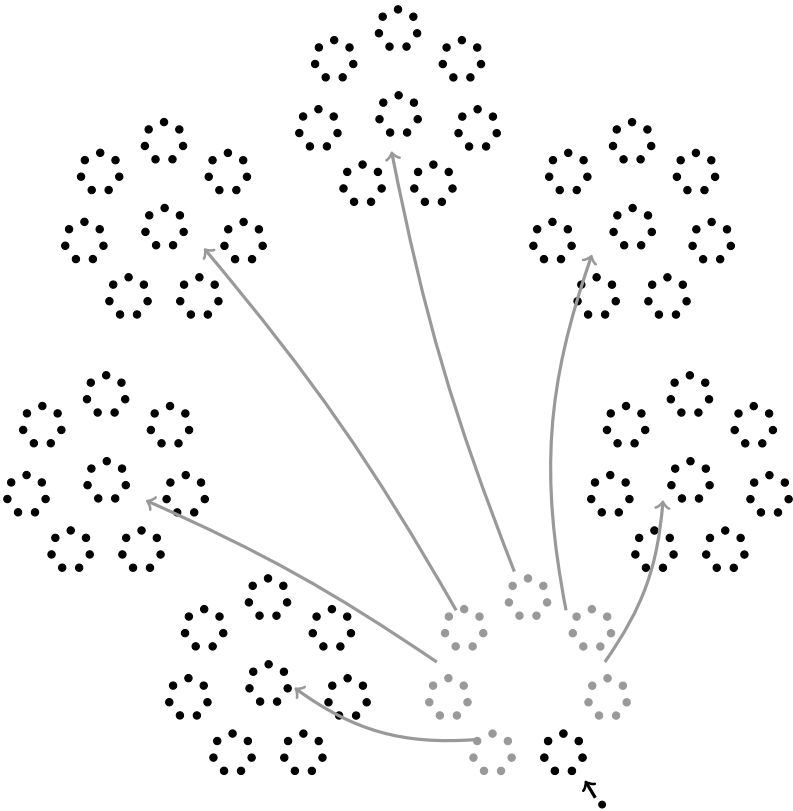
7^2 + 1 = 50

o que não é divisível por 3.

Só que, tirando 1 a coisa passa a funcionar — (i.e., aquilo que sobra é divisível por 8)



E daí, com o heptágono de heptágonos de heptágonos, a gente soma 1 outra vez



Quer dizer, dessa vez a gente descobriu que os números

7^1 + 1, 7^3 + 1, 7^5 + 1, 7^7 + 1, ...

são todos divisíveis por 8.

E que os números

7^2 - 1, 7^4 - 1, 7^6 - 1, 7^8 - 1, ...

também são todos divisíveis por 8.

Mas, porque é que a coisa funciona?

Bom, vamos começar com o caso par, que é mais fácil

7^2 + 1

Daí, a gente reescreve a coisa assim

(7^2)^n - 1

e depois assim

49^n - 1

Daí, a gente lembra da regra da aula passada

→ 49^n - 1 é sempre divisível por 48

Mas, 48 é divisível por 8.

Então, 49^n - 1 também é divisível 8.

O que nos dá

→ 7^{2n} - 1 é sempre divisível por 8

Certo.

Agora a gente considera o caso ímpar

7^{2n+1} + 1

Dessa vez, a gente reescreve a coisa assim

7 · 7^{2n} + 1

E aqui é a hora para uma pequena esperteza.

Quer dizer, a gente desmonta o 1 assim

1 = 8 - 7

Daí, a gente reescreve a nossa expressão assim

7 · 7^{2n} + 8 - 7

E coloca o 7 em evidência

7 · (7^{2n} - 1) + 8

Aqui a gente nota que

7 · (7^{2n} - 1) + 8

O que nos dá

→ 7^{2n+1} + 1 é sempre divisível por 8