

A generalização da regra

Agora, a gente tem mais uma regra para a divisibilidade de potências

- $3^{2n} - 1$ e $3^{2n+1} + 1$ são sempre divisíveis por 4
- $4^{2n} - 1$ e $4^{2n+1} + 1$ são sempre divisíveis por 5
- $5^{2n} - 1$ e $5^{2n+1} + 1$ são sempre divisíveis por 6
- e por aí vai ...

Mas para dar o próximo passo, a gente precisa entender melhor as coisas.

Para isso, a gente olha para essa regra outra vez

$$\rightarrow 4^n - 1 \text{ é sempre divisível por } 3$$

E pergunta outra vez: *Porque?*

Bom, vamos raciocinar.

E na matemática, raciocinar é desmontar.

Então, a gente começa desmontando o 4 assim

$$4 = 3 + 1$$

Daí, a gente reescreve a nossa expressão assim

$$(3 + 1)^n = 1$$

E aqui a intuição já começa a imaginar as coisas ...

Mas, vamos um pouco mais devagar.

Quer dizer, vamos começar observando que aquilo que está dentro dos parênteses é um **sobra 1**

— *(na divisão por 3)*

$$\underbrace{(3 + 1)^n}_{\text{sobra 1}} = 1$$

Daí, a gente pode perguntar o que acontece quando a gente tira as potências de um **sobra 1**.

Bom, vamos ver.

Quer dizer, a gente começa com o **sobra 1** ao quadrado

$$(3 + 1)^2 = (3 + 1) \cdot (3 + 1)$$

$$= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1^2$$

A esperteza nesse ponto é reescrever a coisa assim

$$(3 + 1)^2 = 3 \cdot (3 + 2) + 1$$

Sim! isso é um **sobra 1** — *(na divisão por 3)*

$$(3 + 1)^2 = 3K + 1$$

Agora, a gente olha para o **sobra 1** ao cubo

$$(3 + 1)^3$$

E a esperteza dessa vez é reescrever a coisa assim

$$(3 + 1)^3 = (3 + 1)^2 \cdot (3 + 1)$$

$$= (3K + 1) \cdot (3 + 1)$$

$$= 3^2K + 3k + 3 \cdot 1 + 1^2$$

$$= 3 \cdot [3K + k + 1] + 1$$

$$= 3L + 1$$

— *(i.e., um sobra 1)*

Então, a gente acabou de descobrir que

$$\rightarrow \text{as potências do sobra 1 sempre dão um sobra 1}$$

Agora, a gente pode olhar para isso aqui outra vez

$$(3 + 1)^n = 1$$

e reescrever a coisa assim

$$3K + 1 = 1$$

e depois assim

$$3K$$

E assim a gente vê que a coisa é sempre divisível por 3.

Legal, não é?

Agora, a gente olha outra vez para isso

$$\rightarrow 4^{2n} - 1 \text{ e } 4^{2n+1} + 1 \text{ são sempre divisíveis por } 5$$

E pergunta outra vez: *Porque?*

Bom, para entender porque a gente precisa desmontar outra vez o 4.

E dessa vez, a gente desmonta o 4 assim

$$4 = 5 - 1$$

Sim! o 4 é um **falta 1** — *(na divisão por 5)*

Agora, a gente precisa entender o que acontece quando a gente tira potências de um **falta 1**.

A gente começa com o 1 ao quadrado

$$(5 - 1)^2 = (5 - 1) \cdot (5 - 1)$$

$$= 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 1 + 1^2$$

$$= 5 \cdot (5 - 2) + 1$$

$$= 5K + 1$$

Sim, o **falta 1** ao quadrado é um **sobra 1**.

Agora, a gente olha para o **falta 1** ao cubo

$$(5 - 1)^3 = (5 - 1)^2 \cdot (5 - 1)$$

$$= (5K + 1) \cdot (5 - 1)$$

$$= 5^2K - 5k + 5 \cdot 1 - 1$$

$$= 5 \cdot [5K - k + 1] - 1$$

$$= 5L - 1$$

Sim, o **falta 1** ao cubo dá um **falta 1**.

E então, já deu pra ver o que está acontecendo?

Pois é, dessa vez a regra é a seguinte

$$\rightarrow \begin{array}{l} \text{as potências pares do falta 1 sempre dão um sobra 1} \\ \text{as potências ímpares do falta 1 sempre dão um falta 1} \end{array}$$

Agora, a gente olha outra vez para isso

$$4^{2n} = 1$$

Daí, a gente reescreve a coisa assim

$$(5 - 1)^{2n} = 1$$

e depois assim

$$5K + 1 = 1$$

e depois assim

$$5K$$

E assim a gente vê que a coisa é sempre divisível por 5.

A seguir, a gente olha outra vez para isso

$$4^{2n+1} = 1$$

Daí, a gente reescreve a coisa assim

$$(5 - 1)^{2n+1} = 1$$

e depois assim

$$5K = 1 + 1$$

e depois assim

$$5K$$

E assim a gente vê que a coisa é sempre divisível por 5.

Legal, não é?

Sim, mas ainda tem mais coisa pra gente ver.

Quer dizer, vamos olhar outra vez para isso

$$\rightarrow 5^n - 2^n \text{ é sempre divisível por } 3$$

E vamos perguntar outra vez: *Porque?*

Bom, vamos raciocinar.

Quer dizer, vamos desmontar.

E dessa vez, a gente desmonta o 5 assim

$$5 = 3 + 2$$

Sim, o 5 é um **sobra 2** — *(na divisão por 3)*

Daí a gente quer saber o que acontece quando a gente tira potências de um **sobra 2**.

Bom, vamos ver.

Quer dizer, a gente começa com o **sobra 2** ao quadrado

$$(3 + 2)^2 = (3 + 2) \cdot (3 + 2)$$

$$= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2^2$$

$$= 3K + 2^2$$

Sim! o **sobra 2** ao quadrado é um **sobra 2**².

Agora, a gente olha para o **sobra 2** ao cubo

$$(3 + 2)^3 = (3 + 2)^2 \cdot (3 + 2)$$

$$= (3K + 2^2) \cdot (3 + 2)$$

$$= 3^2K + 3k \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 2^3$$

$$= 3L + 2^3$$

Sim, o **sobra 2** ao cubo é um **sobra 2**³.

Já deu pra ver o que está acontecendo, não é?

Então agora, a gente pode olhar outra vez para isso aqui

$$5^n = 2^n$$

Daí, a gente reescreve a coisa assim

$$(3 + 2)^n = 2^n$$

e depois assim

$$3K + 2^n = 2^n$$

e depois assim

$$3K$$

E assim a gente vê que a coisa é sempre divisível por 3.

Legal, não é?

Sim, mas tudo isso que a gente viu são coisas que a gente já sabia.

Agora, está na hora de descobrir alguma coisa nova.

Para isso, a gente escreve o seguinte

$$5^n + 2^n$$

E então, qual é o seu palpite?

Isso é divisível pelo que?

Bom, o palpite é que isso é divisível por 7 — *(mas pode ser que dependa da paridade do n ...)*

Para verificar o palpite, a gente desmonta o 5 assim

$$5 = 7 - 2$$

Sim! o 5 é um **falta 2** — *(na divisão por 7)*

E agora, a gente precisa ver o que acontece quando a gente tira potências de um **falta 2**.

A gente começa com o **falta 2** ao quadrado

$$(7 - 2)^2 = (7 - 2) \cdot (7 - 2)$$

$$= 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 2 + 2^2$$

$$= 7K + 2^2$$

Sim! o **falta 2** ao quadrado é um **sobra 2**².

Agora, a gente olha para o **falta 2** ao cubo

$$(7 - 2)^3 = (7 - 2)^2 \cdot (7 - 2)$$

$$= (7K + 2^2) \cdot (7 - 2)$$

$$= 7^2K - 7k \cdot 2 + 7 \cdot 2^2 - 2^3$$

$$= 7L - 2^3$$

Sim, o **falta 2** ao cubo é um **falta 2**³.

Já deu pra ver o que está acontecendo, não é?

Então agora, a gente olha outra vez pra isso

$$5^n + 2^n$$

Daí, a gente reescreve a coisa assim

$$(7 - 2)^n + 2^n$$

Aqui, a gente precisa saber se o *n* é par ou ímpar.

Nesse caso, a gente precisa que o *n* seja ímpar — *(porque?)*

Então, a gente assume que o *n* é ímpar.

Daí, como o *n* é ímpar, a gente pode reescrever a coisa assim

$$7K - 2^n + 2^n$$

e depois assim

$$7K$$

E assim a gente vê que a coisa é sempre divisível por 7 — *(quando n é ímpar)*

Mas, e quando n é par?

Bom, quando *n* é par a gente olha para a subtração

$$5^n = 2^n$$

Daí, a gente reescreve a coisa assim

$$(7 - 2)^n = 2^n$$

e depois assim

$$7K + 2^n = 2^n$$

e depois assim

$$7K$$

E assim a gente vê que a coisa é sempre divisível por 7 — *(quando n é par)*

Quer dizer, a gente descobriu mais uma regra de divisibilidade para potências

- $5^{2n} - 2^{2n}$ e $5^{2n+1} + 2^{2n}$ são sempre divisíveis por 7
- $6^{2n} - 3^{2n}$ e $6^{2n+1} + 3^{2n}$ são sempre divisíveis por 9
- $7^{2n} - 4^{2n}$ e $7^{2n+1} + 4^{2n}$ são sempre divisíveis por 11
- e por aí vai ...