

Manipulando a divisibilidade

Agora que nós temos as nossas regras de divisibilidade para potências, a gente pode ver que as coisas que estão no livro de matemática discreta não são tão difíceis assim

Nós vamos começar com isso aqui

→ 5^{2n} - 1 é sempre divisível por 3

Bom, isso é uma potência de 5.

E o 5 pode ser desmontado assim

5 = 6 - 1

Logo, 5^{2n} é um **sobra 1** — (na divisão por 6)

Agora, a gente pode ver que

5^{2n} - 1 = 6K + 1 - 1 = 6K

é sempre divisível por 6.

E tudo o que é divisível por 6 também é divisível por 3.

Legal.

Mas, essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, vamos olhar outra vez para isso

5^{2n} - 1

Daí, a gente reescreve a coisa assim

(5^2)^n - 1

e depois assim

25^n - 1

e depois assim

(3 · 8 + 1)^n - 1

e depois assim

3K + 1 - 1

e depois assim

3K

E assim a gente vê que a coisa é sempre divisível por 3.

A seguir nós vamos ver mais exemplos.

Exemplos

a. Mais divisibilidade por 3

→ 7^n + 2 é sempre divisível por 3

Bom, aqui a gente desmonta o 7

(2 · 3 + 1)^n + 2

E nota que o termo entre parênteses é um **sobra 1** — (na divisão por 3)

Daí, a gente reescreve a coisa assim

3K + 1 + 2

e depois assim

3K + 3

E assim a gente vê que a coisa é sempre divisível por 3.

◇

b. Ainda mais divisibilidade por 3

Virando algumas páginas do livre de matemática discreta, a gente encontra o seguinte

→ (10^n + 5)/3 + 4^{n+2} é sempre um número inteiro divisível por 3

E agora?

Bom, agora a gente raciocina por etapas.

Quer dizer, a gente começa focando a atenção na fração

(10^n + 5)/3

E a esperteza é desmontar o 10 assim

((9 + 1)^n + 5)/3

Sim, nós temos um **sobra 1** dentro dos parênteses — (na divisão por 9)

Logo, a gente pode reescrever a coisa assim

(9K + 1 + 5)/3

e depois assim

(9K + 6)/3

e depois assim

3K + 2

Agora, a gente coloca isso de volta na nossa expressão

3K + 2 + 4^{n+2}

Daí, a gente desmonta o 4

3K + 2 + (3 + 1)^{n+2}

E reescreve a coisa assim

3K + 2 + 3L + 1

e depois assim

3K + 3L + 3

E assim a gente vê que a coisa é sempre um número inteiro divisível por 3.

◇

c. Divisibilidade por 4

→ 6 · 7^n - 2 · 3^n é sempre divisível por 4

Bom, aqui a esperteza é reescrever a coisa assim

4 · 7^n + 2 · 7^n - 2 · 3^n

Daí, como o primeiro termo já é divisível por 4, a gente pode esquecer dele

2 · 7^n - 2 · 3^n

O próximo passo é colocar o 2 em evidência

2 · (7^n - 3^n)

E aqui a gente já pode aplicar a nossa regra de divisibilidade para potências

2 · (7^n - 3^n) / 4

◇

d. Divisibilidade por 5

→ 3^{2n} + 4^{n+1} é sempre divisível por 5

Bom, aqui é preciso raciocinar um pouquinho.

E na matemática, raciocinar significa: desmontar e reescrever.

Então, a gente reescreve assim

(3^2)^n + 4 · 4^n

e depois assim

9^n + 4 · 4^n

Daí, a esperteza é desmontar o primeiro 4 assim

9^n + (5 - 1) · 4^n

e depois reescrever assim

9^n + 5 · 4^n - 4^n

O termo do meio já é divisível por 5, e a gente pode esquecer dele

9^n - 4^n

E aqui a gente já vê que a coisa é sempre divisível por 5 — (pela regra de divisibilidade para potências)

◇

e. Divisibilidade por 7

→ 2^{n+2} + 3^{2n-1} é sempre divisível por 7

Bom, aqui a gente começa reescrevendo assim

2^2 · 2^n + 3 · 3^{2n}

e depois assim

4 · 2^n + 3 · 3^{2n}

Daí, a gente desmonta assim

2^n + 3 · 2^n + 3 · 3^{2n}

E reescreve a coisa assim

2^n + 3 · (2^n + 3^{2n})

e depois assim

2^n + 3 · (2^n + (3^2)^n)

e depois assim

2^n + 3 · (2^n + 9^n)

e depois assim

2^n + 3 · (2^n + (7 + 2)^n)

e depois assim

2^n + 3 · (2^n + 7K + 2^n)

e depois assim

2^n + 3 · 2^n + 3 · 7K + 3 · 2^n

e depois assim

7 · 2^n + 3 · 7K

E assim a gente vê que a coisa é sempre divisível por 7.

◇

f. Divisibilidade por 43

→ 6^{n+1} + 7^{2n-1} é sempre divisível por 43

Bom, aqui a esperteza é desmontar assim

6 · 6^n + 7 · 7^{2n-2}

Daí, a gente reescreve a coisa assim

6 · 6^n + 7 · (7^2)^{n-1}

e depois assim

6 · 6^n + 7 · 49^{n-1}

e depois assim

6 · 6^n + 7 · (43 + 6)^{n-1}

e depois assim

6 · 6^n + 7 · (43K + 6^{n-1})

e depois assim

6 · 6^n + 7 · 43K + 7 · 6^{n-1}

O termo do meio já é divisível por 43, e a gente pode esquecer dele

6 · 6^n + 7 · 6^{n-1}

Nesse ponto, a gente dá mais uma desmontadinha

6 · 6 · 6^{n-1} + 7 · 6^{n-1}

E reescreve a coisa assim

36 · 6^{n-1} + 7 · 6^{n-1}

e depois assim

43 · 6^{n-1}

E assim a gente vê que a coisa é sempre divisível por 43.

◇

g. Desafio

Algumas páginas mais adiante no livro de matemática discreta, a gente encontra uma coisa curiosa

→ Os números abaixo são todos divisíveis por 53

1007, 10017, 100117, 1001117, ...

Será?

Bom, vamos raciocinar.

E na matemática, isso significa desmontar.

Para fazer isso, a gente olha para o número

2 · 100111...1117 / n

E desmonta ele assim

(10000...00)_{n+3} + 10 · (111...111)_n + 7

E reescreve assim

10^{n+3} + 10 · (111...111)_n + 7

A seguir, o truque sujo é reescrever o termo do meio assim

10^{n+3} + 10 · (999...999)_n^9 + 7

e depois assim

10^{n+3} + 10 · (10^n - 1)/9 + 7

e depois assim

10^{n+3} + (10^{n+1} - 10)/9 + 7

e depois assim

100 · 10^{n+1} + (10^{n+1} - 10)/9 + 7

e depois assim

(900 · 10^{n+1} + 10^{n+1} - 10 + 63)/9

e depois assim

(901 · 10^{n+1} + 53)/9

Nesse ponto, a gente nota que

901 = 53 · 17

E reescreve a coisa assim

(53 · 17 · 10^{n+1} + 53)/9

e depois assim

(53 · (17 · 10^{n+1} + 1))/9

e depois assim

(53 · (18 · 10^{n+1} - 10^{n+1} + 1))/9

e depois assim

(53 · (18 · 10^{n+1} - (10^{n+1} - 1)))/9

e depois assim

(53 · (18 · 10^{n+1} - 999...999))/9

e depois assim

53 · (2 · 10^{n+1} - 111...111)

E assim a gente vê que todos os números abaixo são divisíveis por 53

1007 + 10017 + 100117 + 1001117 + ...

◇