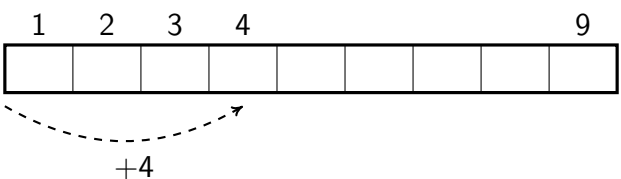


Não apenas os primos

Mas, essa propriedade não é uma exclusividade dos números primos.

Por exemplo, imagine que a lista tem tamanho 9 e nós damos saltos de tamanho 4

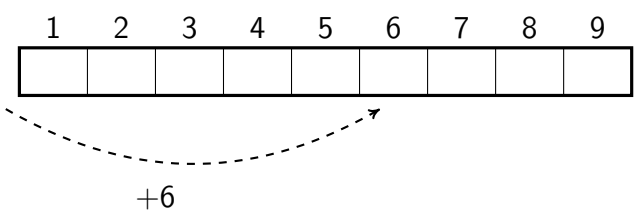


Daí, a sequência de posições por onde a gente passa é

4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5, 9, 4, ...

Quer dizer, a gente passou por todas as posições outra vez.

Por outro lado, quando a lista tem tamanho 9 e nós damos saltos de tamanho 6



Daí, a sequência de posições por onde a gente passa é

6, 3, 9, 6, ...

Mas, o que está acontecendo aqui?

Bom, o que está acontecendo é que 4 e 9 não possuem nenhum divisor comum

— (o que é sempre o caso quando a gente considera pares de primos)

Por outro lado, 6 e 9 possuem um divisor comum: o 3.

Sim, mas e daí?

Bom, daí o seguinte

Fato 1: Quando dois números x e y não possuem divisores comuns, nós temos que

MMC(x, y) = $x \cdot y$

Fato 2: Quando dois números x e y possuem um divisor comum, nós temos que

MMC(x, y) < $x \cdot y$

Daí que, no primeiro caso, o processo só alcança a última posição da lista após 9 saltos

— (e só entra em repetição depois de ter passado por todas as posições)

E no segundo caso, o processo só alcança a última posição antes dos 9 saltos

— (e entra em repetição antes de ter passado por todas as posições)

Bom, a gente pode raciocinar assim

Argumento 1:

Suponha que x e y não possuem um divisor comum.

E suponha que mesmo assim, nós temos

MMC(x, y) = z < $x \cdot y$

Bom, daí a lista completa de múltiplos comuns de x e y é

$z, 2 \cdot z, 3 \cdot z, 4 \cdot z, \dots$

Mas, $x \cdot y$ é um múltiplo comum de x e y .

Então, $x \cdot y$ aparece nessa lista.

Mas, isso significa que

$x \cdot y = k \cdot z$, para algum k

Nesse ponto, a gente lembra que z é um múltiplo comum de x e y

$z = x \cdot \alpha \qquad z = y \cdot \beta$

Daí que, a equação acima implica

$x \cdot y = k \cdot x \cdot \alpha \qquad x \cdot y = k \cdot y \cdot \beta$

E isso implica que

$y = k \cdot \alpha \qquad x = k \cdot \beta$

Mas, isso implica que x e y possuem um fator comum.

Só que isso não pode ser.

Logo, nós devemos ter

MMC(x, y) = $x \cdot y$

□

Argumento 2:

Suponha que x e y possuem um fator comum.

Então, nós podemos escrever E isso implica que

$y = k \cdot \alpha \qquad x = k \cdot \beta$

Agora, é bem fácil ver que $k \cdot \alpha \cdot \beta$ é um múltiplo comum de x e y .

Mas, $k \cdot \alpha \cdot \beta < x \cdot y$.

Logo,

MMC(x, y) < $x \cdot y$

□