

Matemática Discreta

aula 10: Números racionais e irracionais

1 Introdução

Hoje nós vamos começar com a seguinte pergunta

- *O que é 0,333... ?*

Bom, muita gente gosta de responder assim: *Isso é uma dízima periódica.*

Mas daí, a gente nota que ‘dízima’ é a mesma coisa que ‘decimal’ — (*ou quase ...*)

E também nota que ‘periódico’ é a mesma coisa que ‘repetitivo’ — (*ou quase ...*)

Assim, a gente descobre que o 0,333... é um número decimal repetitivo.

E daí, porque ele é repetitivo, a gente pode desmontá-lo assim

$$0,3 \quad + \quad 0,03 \quad + \quad 0,003 \quad + \quad 0,0003 \quad + \quad \dots$$

e depois reescreve-lo assim

$$\frac{3}{10} \quad + \quad \frac{3}{100} \quad + \quad \frac{3}{1000} \quad + \quad \frac{3}{10000} \quad + \quad \dots$$

Sim, o nosso número é uma soma de PG!

E isso é uma coisa que a gente já sabe calcular.

Quer dizer, chamando a soma de S

$$S \quad = \quad \frac{3}{10} \quad + \quad \frac{3}{100} \quad + \quad \frac{3}{1000} \quad + \quad \frac{3}{10000} \quad + \quad \dots$$

a gente pode reescrever a coisa assim

$$S \quad = \quad \frac{3}{10} \quad + \quad \frac{1}{10} \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{10} \quad + \quad \frac{3}{100} \quad + \quad \frac{3}{1000} \quad + \quad \dots \right)}_S$$

Daí, reconhecendo a soma S dentro dos parênteses, a gente reescreve assim

$$S \quad = \quad \frac{3}{10} \quad + \quad \frac{1}{10} \cdot S$$

e depois assim

$$10 \cdot S \quad - \quad S \quad = \quad 3$$

E daí, é bem fácil chegar a

$$S \quad = \quad \frac{1}{3}$$

2 Números racionais

Vejamos outro exemplo

- *O que é 0,818181... ?*

Bom, isso é um decimal repetitivo, que a gente pode desmontar assim

$$\frac{8}{10} + \frac{1}{100} + \frac{8}{1.000} + \frac{1}{10.000} + \frac{8}{100.000} + \dots$$

Dessa vez, nós não temos uma soma de PG.

Mas, reorganizando a coisa assim, a gente vê duas somas de PG

$$\begin{aligned} & \frac{8}{10} + \frac{8}{1.000} + \frac{8}{100.000} + \dots \\ & + \frac{1}{100} + \frac{1}{10.000} + \frac{1}{1.000.000} + \dots \end{aligned}$$

Daí, uma pequena esperteza é reescrever a coisa assim

$$\begin{aligned} & \frac{8}{10} + \frac{8}{10} \cdot \left[\frac{1}{100} + \frac{1}{10.000} + \frac{1}{1.000.000} + \dots \right] \\ & + \frac{1}{100} + \frac{1}{10.000} + \frac{1}{1.000.000} + \dots \end{aligned}$$

e depois assim

$$\frac{8}{10} + \left(1 + \frac{8}{10} \right) \cdot \left[\frac{1}{100} + \frac{1}{10.000} + \frac{1}{1.000.000} + \dots \right]$$

e depois assim

$$\frac{8}{10} + \left(1 + \frac{8}{10} \right) \cdot \left[\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \dots \right]$$

Certo.

Agora, a gente resolve a soma de PG dentro dos parênteses

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \frac{1}{100^4} + \dots \\ &= \frac{1}{100} + \frac{1}{100} \cdot \left[\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{100} + \frac{1}{100} \cdot S \end{aligned}$$

Donde,

$$S = \frac{1}{99}$$

Daí que, a nossa soma é isso aqui

$$\frac{8}{10} + \left(1 + \frac{8}{10} \right) \cdot \frac{1}{99} = \dots = \frac{9}{11}$$

Hmm ...

Você já viu o que está acontecendo?

Vejamos um último exemplo

- O que é $0, \underbrace{285714} \underbrace{285714} \dots$?

Bom, isso é mais um decimal repetitivo, que a gente pode desmontar assim

$$\frac{285714}{1.000.000} + \frac{285714}{1.000.000^2} + \frac{285714}{1.000.000^3} + \dots$$

Sim, uma soma de PG outra vez!

E a gente pode calcular essa soma assim

$$\begin{aligned} &= 285714 \cdot \left[\frac{1}{1.000.000} + \frac{1}{1.000.000^2} + \frac{1}{1.000.000^3} + \dots \right] \\ &= 285714 \cdot \left[\frac{1}{1.000.000 - 1} \right] \\ &= \frac{285714}{999999} \end{aligned}$$

Daí, uma coisa engraçada é que

$$\frac{285714}{999999} = \frac{2}{7}$$

Legal.

Mas, o ponto importante não é esse.

O ponto importante é que todo decimal repetitivo pode ser desmontado como uma soma de PG

E que essa soma de PG sempre tem como resultado uma fração (ou razão) de inteiros.

Daí que, os decimais repetitivos também são chamados de *números racionais*.

3 A raiz quadrada de 2

Agora, considere a seguinte pergunta

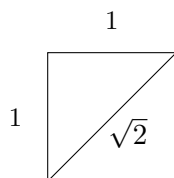
- O que é a $\sqrt{2}$?

Mas, isso não é uma pergunta fácil.

Então é melhor deixar ela pra lá, e começar com essa outra pergunta aqui

- Como é que a gente encontra a $\sqrt{2}$?

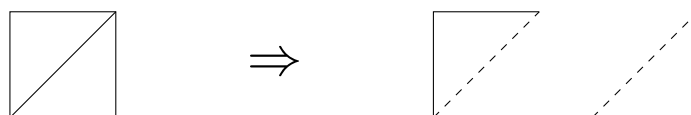
A resposta é fácil: a gente encontra a $\sqrt{2}$ olhando para a diagonal do quadrado de lado 1



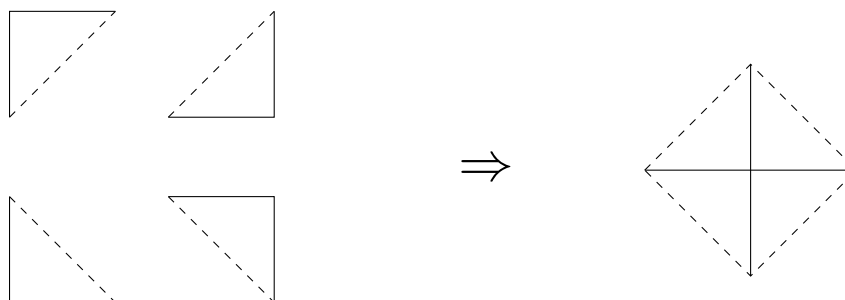
Mas, como é que a gente sabe que a diagonal é $\sqrt{2}$?

Bom, isso é bem fácil de ver.

Quer dizer, comece dividindo o quadrado no meio, ao longo da diagonal



Daí, pegue mais uma cópia de cada pedaço, e monte um novo quadrado



Bom, a figura que a gente construiu é um quadrado.

— (porque?)

E a sua área é igual a 2.

— (porque?)

Mas, a área do quadrado é igual ao quadrado do comprimento do seu lado.

Daí que, esse quadrado tem o lado igual a $\sqrt{2}$.

Mas, o lado desse quadrado é a diagonal do quadrado de lado 1.

Logo, o quadrado de lado 1 tem diagonal $\sqrt{2}$.

Certo.

Então é assim que a gente encontra a $\sqrt{2}$ — (ou de algum outro jeito parecido ...)

E agora a gente pode perguntar outra vez

- O que é a $\sqrt{2}$?

Mas aqui vem uma má notícia

→ A $\sqrt{2}$ não é um número ... :/

Como assim?

Bom, as coisas que nós chamamos de número são

- os números inteiros: ... -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , ...
- os números racionais: $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{4}{1}$, etc

Mas, a $\sqrt{2}$ não é nem uma coisa nem outra.

Vejamos.

É bem fácil ver que a $\sqrt{2}$ não é um número inteiro.

Quer dizer, a gente começa comparando a $\sqrt{2}$ com o 1

$$\sqrt{2} \quad \underline{\quad ? \quad} \quad 1$$

Daí, a gente eleva os dois lados ao quadrado

$$(\sqrt{2})^2 \quad \underline{\quad ? \quad} \quad (1)^2$$

o que dá

$$2 \quad \underline{\quad ? \quad} \quad 1$$

Só que isso a gente sabe que é

$$2 \quad > \quad 1$$

Logo,

$$\sqrt{2} \quad > \quad 1$$

Legal.

Agora, a gente compara a $\sqrt{2}$ com o 2

$$\sqrt{2} \quad \underline{\quad ? \quad} \quad 2$$

Daí, a gente eleva os dois lados ao quadrado

$$(\sqrt{2})^2 \quad \underline{\quad ? \quad} \quad (2)^2$$

o que dá

$$2 \quad \underline{\quad ? \quad} \quad 4$$

Só que isso a gente sabe que é

$$2 \quad < \quad 4$$

Logo,

$$\sqrt{2} \quad < \quad 2$$

Quer dizer, a gente descobriu que

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

Mas, não existe nenhum número inteiro entre 1 e 2.

Daí que, a $\sqrt{2}$ não é um número inteiro.

Certo.

Também não é difícil ver que a $\sqrt{2}$ não é um número racional.

O argumento mais conhecido é esse aqui

- Imagine que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

- Daí, a gente pode fazer a seguinte manipulação

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2 \cdot b^2$$

- E isso implica que a é par — (*porque?*)

- Daí, como a é par, a gente pode escrever

$$a = 2c$$

- Após a substituição, a gente faz a seguinte manipulação

$$(2c)^2 = 2 \cdot b^2 \Rightarrow 4c^2 = 2 \cdot b^2 \Rightarrow 2c^2 = b^2$$

- E isso implica que b é par — (*porque?*)

- Daí, como b é par, a gente pode escrever

$$b = 2d$$

- Após a substituição, a gente faz a seguinte manipulação

$$2c^2 = (2d)^2 \Rightarrow 2c^2 = 4 \cdot d^2 \Rightarrow c^2 = 2d^2$$

- E isso implica que c é par.

O que também implica que a é divisível por 4 — (*porque?*)

- Daí, como c é par, a gente pode escrever

$$c = 2e$$

- Após a substituição, a gente faz a seguinte manipulação

$$(2e)^2 = 2 \cdot d^2 \Rightarrow 4e^2 = 2 \cdot d^2 \Rightarrow 2e^2 = d^2$$

- E isso implica que d é par.

O que também implica que b é divisível por 4 — (*porque?*)

- e por aí vai ...

Quer dizer, a coisa entrou em repetição.

Daí que, a e b são números que podem ser divididos por qualquer potência de 2.

Só que isso não pode ser.

Logo, não existem a, b inteiros tais que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Logo, $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Outro argumento

Mas, essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, imagine outra vez que

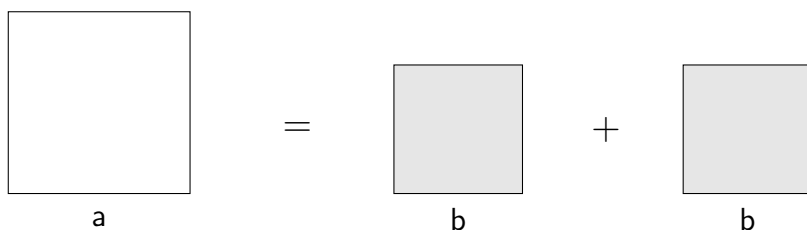
$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

E manipule a coisa para chegar aqui

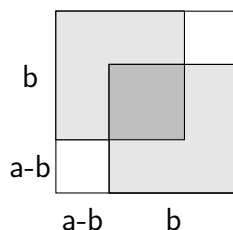
$$a^2 = 2 \cdot b^2$$

Bom, isso está dizendo que

→ *Existem dois quadrados com lados inteiros a e b ,
onde a área do primeiro é o dobro da área do segundo*



Agora, imagine que nós colocamos os dois quadrados menores (sobrepostos) dentro do quadrado maior



Como a área dos dois quadrados é igual à área do quadrado maior, a sua interseção (i.e., o quadrado escuro) deve ser igual à parte que não está coberta (os dois quadradinhos brancos).

The diagram shows the equation $a - 2(a-b) = (a-b) + (a-b)$ using area. On the left is a dark gray square labeled $a - 2(a-b)$. This is equal to the sum of two white squares, each labeled $a-b$, separated by a plus sign.

Não apenas isso, mas $a - 2(a - b)$ e $a - b$ são números inteiros.

Quer dizer,

→ *Nós temos dois quadrados, com lados inteiros (menores que os anteriores),
onde a área do primeiro é o dobro da área do segundo*

E agora a gente pode continuar fazendo a mesma coisa para sempre.

Só que a gente não pode continuar fazendo a mesma coisa para sempre — (*porque?*)

Logo, $\sqrt{2}$ é um número irracional.

4 Números irracionais (ou não repetitivos)

Em resumo, a gente já descobriu que

- a $\sqrt{2}$ é uma coisa que multiplicada por ela mesma dá 2
- mas essa coisa não é um número — (*ou, pelo menos, não é um dos números que a gente conhece*)

Certo.

Daí, a gente pode perguntar

- *Mas, o que é a $\sqrt{2}$ então?*

Hmm...

É melhor deixar essa pergunta pra lá outra vez.

Daí, a gente pode concentrar a atenção nessa observação aqui

→ *a $\sqrt{2}$ é uma coisa que a gente pode comparar com os números
que a gente conhece*

Quer dizer, a gente já viu isso.

Quando a gente viu que a $\sqrt{2}$ não é um número inteiro, o argumento foi basicamente o seguinte

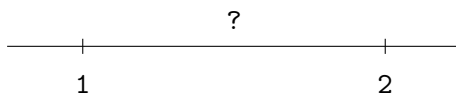
- como $1^2 < 2 = (\sqrt{2})^2$, nós temos que $1 < \sqrt{2}$
- como $2^2 > 2 = (\sqrt{2})^2$, nós temos que $2 > \sqrt{2}$

Sim, a coisa é meio indireta.

Mas funciona!

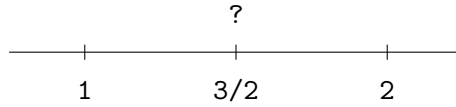
E daí, nós podemos usar essa ideia para procurar a $\sqrt{2}$.

Quer dizer, nós já sabemos que ela deve estar em algum lugar entre 1 e 2



Mas, onde ela está?

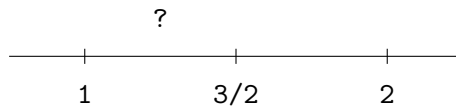
Bom, nós podemos examinar o ponto médio do intervalo



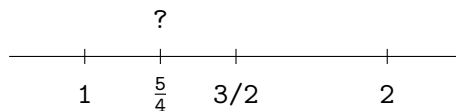
Daí, a gente aplica o raciocínio outra vez

- como $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2 = (\sqrt{2})^2$, nós temos que $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$

E agora, a gente descobriu que a $\sqrt{2}$ deve estar em algum lugar entre 1 e $\frac{3}{2}$



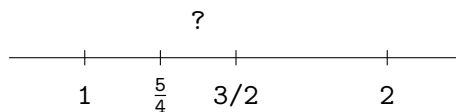
Daí, nós examinamos o ponto médio do intervalo que sobrou



Aplicamos o raciocínio outra vez

- como $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} < 2 = (\sqrt{2})^2$, nós temos que $\frac{5}{4} < \sqrt{2}$

E daí, a gente descobre que a $\sqrt{2}$ deve estar em algum lugar entre $\frac{5}{4}$ e $\frac{3}{2}$



Os próximos passos são

- como $\left(\frac{11}{8}\right)^2 = \frac{121}{64} < 2 = (\sqrt{2})^2$, nós temos que $\frac{11}{8} < \sqrt{2}$
- como $\left(\frac{23}{16}\right)^2 = \frac{529}{256} > 2 = (\sqrt{2})^2$, nós temos que $\frac{23}{16} > \sqrt{2}$
- como $\left(\frac{45}{32}\right)^2 = \frac{2025}{1024} < 2 = (\sqrt{2})^2$, nós temos que $\frac{45}{32} < \sqrt{2}$

Nesse ponto, nós já sabemos que

$$\frac{45}{32} < \sqrt{2} < \frac{23}{16}$$

o que é a mesma coisa que

$$1,40625 < \sqrt{2} < 1,4375$$

Mas, isso significa que se a $\sqrt{2}$ fosse um número, então ela começaria assim

$$1,4\dots$$

Porque todo número nesse intervalo começa desse jeito.

Legal.

E agora que a gente entendeu como a coisa funciona, a gente pode continuar repetindo o raciocínio.

Ou melhor, a gente pode escrever um programa de computador para fazer isso.

E quando a gente escreve esse programa e executa ele, o que a gente vê é o seguinte

$$\boxed{P_{\sqrt{2}}} \longrightarrow 1,414213\dots$$

Quer dizer, a medida que o programa executa, ele vai espremendo a $\sqrt{2}$ em um intervalo cada vez mais estreito — (*onde todo mundo começa do mesmo jeito ...*)

E dessa maneira, nós vamos descobrindo os dígitos da $\sqrt{2}$.

Legal, não é?

Agora, o mais legal é que finalmente a gente pode responder a pergunta

- *O que é a $\sqrt{2}$?*

E a resposta é a seguinte

$\rightarrow$ *A $\sqrt{2}$ é o resultado de um programa que roda para sempre*

Mas, quem garante que o programa vai rodar para sempre?

Bom, tem que rodar.

Porque toda vez que a gente examina o ponto médio de um intervalo, esse ponto médio é sempre um número racional — (*porque?*)

Daí que, a gente nunca encontra a $\sqrt{2}$.

E daí, a gente vai continuar procurando pra sempre.

Certo.

Mas, ainda tem uma outra coisa legal.

Quer dizer, a sequência de dígitos produzida pelo programa

$$\boxed{P_{\sqrt{2}}} \longrightarrow 1,414213\dots$$

nunca entra em repetição.

Porque?

Bom, porque se entrasse em repetição, então $\sqrt{2}$ seria um número racional.

Mas, $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Logo, não entra em repetição.

5 Mais números irracionais

Agora, a gente pode fazer a mesma coisa com o 3

$$3 \longrightarrow \boxed{P_{\sqrt{}}} \longrightarrow 1,732050\dots$$

Mas, quem disse que essa sequência nunca acaba?

E quem disse que ela não entra em repetição?

Bom, aqui a gente pode raciocinar do mesmo jeito outra vez.

Quer dizer, suponha que $\sqrt{3}$ é um número racional

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b}$$

Daí, a gente raciocina assim

$$\Rightarrow 3 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow a^2 = 3 \cdot b^2$$

$$\Rightarrow a \text{ é múltiplo de } 3 \text{ — (porque?)}$$

$$\Rightarrow a = 3 \cdot c$$

$$\Rightarrow (3c)^2 = 3 \cdot b^2$$

$$\Rightarrow b^2 = 3 \cdot c^2$$

$$\Rightarrow b \text{ é múltiplo de } 3 \text{ — (porque?)}$$

$$\Rightarrow b = 3 \cdot d$$

$$\Rightarrow (3d)^2 = 3 \cdot c^2$$

$$\Rightarrow c^2 = 3 \cdot d^2$$

$$\Rightarrow c \text{ é múltiplo de } 3 \text{ — (porque?)}$$

$$\Rightarrow a \text{ é múltiplo de } 9 \text{ — (porque?)}$$

=> ...

Quer dizer, a coisa entra em repetição.

Logo, a e b podem ser divididos por qualquer potência de 3.

Só que isso não pode ser.

Logo, $\sqrt{3}$ é um número irracional.

Legal.

É claro que a gente pode fazer a mesma coisa com qualquer número primo p .

E a gente também pode dizer o seguinte

→ *Se x não é um quadrado perfeito, então $\sqrt{x}$ é um número irracional*
— *(porque?)*

Vejamos mais exemplos

Exemplos

a. Soma de irracionais

- *O que é $\sqrt{2} + \sqrt{3}$?*

Bom, aqui a gente pode pensar que isso é uma soma de números irracionais.

Logo, o resultado também deve ser irracional.

Mas, nem sempre isso é verdade ...

Quer dizer, considere o número

0, 1 2 1 1 2 2 1 1 1 2 2 2 ...

Isso claramente é um número irracional — *(porque não é repetitivo ... — ou será que é?)*

Daí, somando a ele esse outro número irracional

0, 2 1 2 2 1 1 2 2 2 1 1 1 ...

a gente obtém

0, 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 ...

que é um número racional.

Mas, voltando ao $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, a gente pode argumentar assim

- Se $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ fosse racional, então $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ também seria racional — *(porque?)*
- Mas, $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{2}\sqrt{3}$
- E aqui a gente observa que $\sqrt{2}\sqrt{3}$ é a coisa que multiplicada por ela mesma dá 6.

- Logo, a gente pode escrever $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$
- Mas, isso não pode ser racional.
- Porque se fosse, então $\sqrt{6}$ também seria racional — (*porque?*)
- Só que isso não é verdade — (*porque 6 não é um quadrado perfeito*)
- Logo, $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ não é racional.
- E daí $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ também não é racional.

◇

b. Soma de racional e irracional

- *O que é $2 + \sqrt{5}$?*

Bom, imagine que

$$2 + \sqrt{5} = r$$

para algum número racional r .

Então, passando o 2 para o outro lado

$$\sqrt{5} = r - 2$$

nós teríamos que $\sqrt{5}$ é um número racional.

Só que isso não é verdade.

Logo, $2 + \sqrt{5}$ é irracional.

— (*E um raciocínio parecido mostra que ao subtrair, multiplicar ou dividir um racional e um irracional, nós sempre obtemos um irracional*)

◇

c. Um pequeno truque sujo¹

- *O que é $\sqrt{3} + \sqrt[3]{3}$?*

Bom, imagine que

$$\sqrt{3} + \sqrt[3]{3} = R$$

para algum número racional R .

Daí, elevando os dois lados ao cubo, nós obtemos o seguinte

$$(\sqrt{3})^3 + 3 \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt[3]{3} + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot (\sqrt[3]{3})^2 + (\sqrt[3]{3})^3 = R^3$$

o que a gente reescreve assim

$$3 \cdot \sqrt{3} + 3^2 \cdot \sqrt[3]{3} + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot (\sqrt[3]{3})^2 + 3 = R^3$$

¹Marcus Lucas, 2025.1

Daí, o pequeno truque sujo é observar que

$$\sqrt[3]{3} = R - \sqrt{3}$$

Substituindo essa expressão na equação acima, nós obtemos

$$3 \cdot \sqrt{3} + 3^2 \cdot (R - \sqrt{3}) + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot (R - \sqrt{3})^2 + 3 = R^3$$

E agora, é só fazer conta.

O primeiro passo é reescrever a coisa assim

$$3 \cdot \sqrt{3} + 3^2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot (R^2 - 2R \cdot \sqrt{3} + 3) = R^3 - 3^2 \cdot R - 3$$

e depois assim

$$3 \cdot \sqrt{3} + 3^2 \cdot \sqrt{3} + 3R^2 \cdot \sqrt{3} - 6R \cdot 3 + 3^2 \cdot \sqrt{3} + = R^3 - 3^2 \cdot R - 3$$

e depois assim

$$\sqrt{3} \cdot (3^2 + 3R^2 + 3^2) = R^3 - 3^2 \cdot R - 3 + 6R \cdot 3$$

e depois assim

$$\sqrt{3} = \frac{R^3 - 3^2 \cdot R - 3 + 6R \cdot 3}{3^2 + 3R^2 + 3^2}$$

o que é uma contradição.

◇

d. A raiz quadrada da raiz quadrada de 2

Mas, existem outras possibilidades.

Por exemplo, nós podemos fazer o seguinte

$$2 \longrightarrow \boxed{P_{\sqrt{}}} \longrightarrow \sqrt{2} \longrightarrow \boxed{P_{\sqrt{}}} \longrightarrow \sqrt{\sqrt{2}}$$

E agora?

Bom, a primeira coisa é que $\sqrt{\sqrt{2}}$ é a coisa que multiplicada por ela mesma dá $\sqrt{2}$.

Mas, $\sqrt{2}$ é a coisa que multiplicada por ela mesma dá 2.

Logo, $\sqrt{\sqrt{2}}$ é a coisa que multiplicada por ela mesma 4 vezes dá 2

$$\sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} = 2$$

Daí que, a gente pode escrever assim

$$\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$$

E agora a gente pode perguntar

- *O que é $\sqrt[4]{2}$?*

Bom, suponha que isso é um número racional

$$\sqrt[4]{2} = r$$

Então, elevando os dois lados ao quadrado, nós concluimos que

$$\sqrt{2} = r^2$$

Mas, isso não pode ser.

Logo, $\sqrt[4]{2}$ é um número irracional.

◇