

o que é o 0,818181...?

Vejamos outro exemplo

- *O que é 0,818181... ?*

Bom, isso é um decimal repetitivo, que a gente pode desmontar assim

$$\frac{8}{10} + \frac{1}{100} + \frac{8}{1.000} + \frac{1}{10.000} + \frac{8}{100.000} + \dots$$

Dessa vez, nós não temos uma soma de PG.

Mas, reorganizando a coisa assim, a gente vê duas somas de PG

$$\begin{aligned} &\frac{8}{10} + \frac{8}{1.000} + \frac{8}{100.000} + \dots \\ &+ \frac{1}{100} + \frac{1}{10.000} + \frac{1}{1.000.000} + \dots \end{aligned}$$

Daí, uma pequena esperteza é reescrever a coisa assim

$$\begin{aligned} &\frac{8}{10} + \frac{8}{10} \cdot \left[\frac{1}{100} + \frac{1}{10.000} + \frac{1}{1.000.000} + \dots \right] \\ &+ \frac{1}{100} + \frac{1}{10.000} + \frac{1}{1.000.000} + \dots \end{aligned}$$

e depois assim

$$\frac{8}{10} + \left(1 + \frac{8}{10} \right) \cdot \left[\frac{1}{100} + \frac{1}{10.000} + \frac{1}{1.000.000} + \dots \right]$$

e depois assim

$$\frac{8}{10} + \left(1 + \frac{8}{10} \right) \cdot \left[\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \dots \right]$$

Certo.

Agora, a gente resolve a soma de PG dentro dos parênteses

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \frac{1}{100^4} + \dots \\ &= \frac{1}{100} + \frac{1}{100} \cdot \left[\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{100} + \frac{1}{100} \cdot S \end{aligned}$$

Donde,

$$S = \frac{1}{99}$$

Daí que, a nossa soma é isso aqui

$$\frac{8}{10} + \left(1 + \frac{8}{10} \right) \cdot \frac{1}{99} = \dots = \frac{9}{11}$$

Hmm ...

Você já viu o que está acontecendo?

Vejamos um último exemplo

- *O que é $0, \underbrace{285714}_{\text{repete}} \underbrace{285714}_{\text{repete}} \dots$?*

Bom, isso é mais um decimal repetitivo, que a gente pode desmontar assim

$$\frac{285714}{1.000.000} + \frac{285714}{1.000.000^2} + \frac{285714}{1.000.000^3} + \dots$$

Sim, uma soma de PG outra vez!

E a gente pode calcular essa soma assim

$$\begin{aligned} &= 285714 \cdot \left[\frac{1}{1.000.000} + \frac{1}{1.000.000^2} + \frac{1}{1.000.000^3} + \dots \right] \\ &= 285714 \cdot \left[\frac{1}{1.000.000 - 1} \right] \\ &= \frac{285714}{999999} \end{aligned}$$

Daí, uma coisa engraçada é que

$$\frac{285714}{999999} = \frac{2}{7}$$

Legal.

Mas, o ponto importante não é esse.

O ponto importante é que todo decimal repetitivo pode ser desmontado como uma soma de PG

E que essa soma de PG sempre tem como resultado uma fração (ou razão) de inteiros.

Daí que, os decimais repetitivos também são chamados de *números racionais*.