

Nem inteiro e nem racional

E agora a gente pode perguntar outra vez

- *O que é a $\sqrt{2}$?*

Mas aqui vem uma má notícia

→ *A $\sqrt{2}$ não é um número ...* :/

Como assim?

Bom, as coisas que nós chamamos de número são

- os números inteiros: ... -2, -1, 0, 1, 2, ...
- os números racionais: $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{4}{1}$, etc

Mas, a $\sqrt{2}$ não é nem uma coisa nem outra.

Vejamos.

É bem fácil ver que a $\sqrt{2}$ não é um número inteiro.

Quer dizer, a gente começa comparando a $\sqrt{2}$ com o 1

$$\sqrt{2} \quad ? \quad 1$$

Daí, a gente eleva os dois lados ao quadrado

$$(\sqrt{2})^2 \quad ? \quad (1)^2$$

o que dá

$$2 \quad ? \quad 1$$

Só que isso a gente sabe que é

$$2 > 1$$

Logo,

$$\sqrt{2} > 1$$

Legal.

Agora, a gente compara a $\sqrt{2}$ com o 2

$$\sqrt{2} \quad ? \quad 2$$

Daí, a gente eleva os dois lados ao quadrado

$$(\sqrt{2})^2 \quad ? \quad (2)^2$$

o que dá

$$2 \quad ? \quad 4$$

Só que isso a gente sabe que é

$$2 < 4$$

Logo,

$$\sqrt{2} < 2$$

Quer dizer, a gente descobriu que

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

Mas, não existe nenhum número inteiro entre 1 e 2.

Daí que, a $\sqrt{2}$ não é um número inteiro.

Certo.

Também não é difícil ver que a $\sqrt{2}$ não é um número racional.

O argumento mais conhecido é esse aqui

- Imagine que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$
- Daí, a gente pode fazer a seguinte manipulação

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2 \cdot b^2$$

- E isso implica que a é par — *(porque?)*
- Daí, como a é par, a gente pode escrever

$$a = 2c$$

- Após a substituição, a gente faz a seguinte manipulação

$$(2c)^2 = 2 \cdot b^2 \Rightarrow 4c^2 = 2 \cdot b^2 \Rightarrow 2c^2 = b^2$$

- E isso implica que b é par — *(porque?)*
- Daí, como b é par, a gente pode escrever

$$b = 2d$$

- Após a substituição, a gente faz a seguinte manipulação

$$2c^2 = (2d)^2 \Rightarrow 2c^2 = 4 \cdot d^2 \Rightarrow c^2 = 2d^2$$

- E isso implica que c é par.
O que também implica que a é divisível por 4 — *(porque?)*
- Daí, como c é par, a gente pode escrever

$$c = 2e$$

- Após a substituição, a gente faz a seguinte manipulação

$$(2e)^2 = 2 \cdot d^2 \Rightarrow 4e^2 = 2 \cdot d^2 \Rightarrow 2e^2 = d^2$$

- E isso implica que d é par.
O que também implica que b é divisível por 4 — *(porque?)*
- e por aí vai ...

Quer dizer, a coisa entrou em repetição.

Daí que, a e b são números que podem ser divididos por qualquer potência de 2.

Só que isso não pode ser.

Logo, não existem a, b inteiros tais que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Logo, $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Outro argumento

Mas, essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, imagine outra vez que

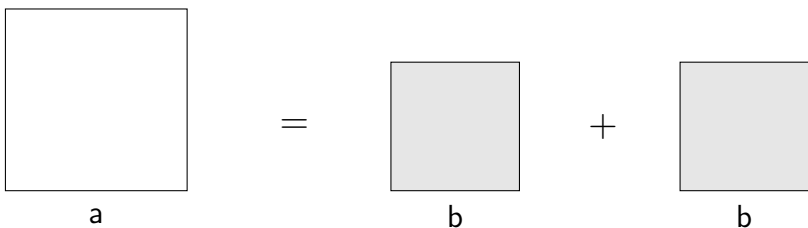
$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

E manipule a coisa para chegar aqui

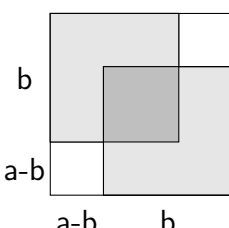
$$a^2 = 2 \cdot b^2$$

Bom, isso está dizendo que

→ *Existem dois quadrados com lados inteiros a e b,
onde a área do primeiro é o dobro da área do segundo*



Agora, imagine que nós colocamos os dois quadrados menores (sobrepostos) dentro do quadrado maior



Como a área dos dois quadrados é igual à área do quadrado maior, a sua interseção (i.e., o quadrado escuro) deve ser igual à parte que não está coberta (os dois quadradinhos brancos).

$$\begin{array}{c} \text{a-2(a-b)} \\ \text{a-2(a-b)} \end{array} = \begin{array}{c} \text{a-b} \\ \text{a-b} \end{array} + \begin{array}{c} \text{a-b} \\ \text{a-b} \end{array}$$

Não apenas isso, mas $a - 2(a - b)$ e $a - b$ são números inteiros.

Quer dizer,

→ *Nós temos dois quadrados, com lados inteiros (menores que os anteriores),
onde a área do primeiro é o dobro da área do segundo*

E agora a gente pode continuar fazendo a mesma coisa para sempre.

Só que a gente não pode continuar fazendo a mesma coisa para sempre — *(porque?)*

Logo, $\sqrt{2}$ é um número irracional.