

Números irracionais

Em resumo, a gente já descobriu que

- a $\sqrt{2}$ é uma coisa que multiplicada por ela mesma dá 2
- mas essa coisa não é um número — (ou, pelo menos, não é um dos números que a gente conhece)

Certo.

Daí, a gente pode perguntar

- Mas, o que é a $\sqrt{2}$ então?

Hmm...

É melhor deixar essa pergunta pra lá outra vez.

Daí, a gente pode concentrar a atenção nessa observação aqui

→ a $\sqrt{2}$ é uma coisa que a gente pode comparar com os números que a gente conhece

Quer dizer, a gente já viu isso.

Quando a gente viu que a $\sqrt{2}$ não é um número inteiro, o argumento foi basicamente o seguinte

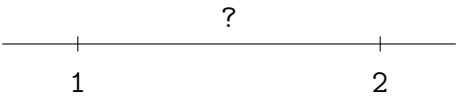
- como $1^2 < 2 = (\sqrt{2})^2$, nós temos que $1 < \sqrt{2}$
- como $2^2 > 2 = (\sqrt{2})^2$, nós temos que $2 > \sqrt{2}$

Sim, a coisa é meio indireta.

Mas funciona!

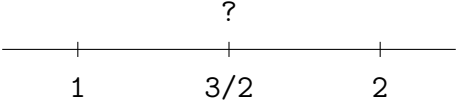
E daí, nós podemos usar essa ideia para procurar a $\sqrt{2}$.

Quer dizer, nós já sabemos que ela deve estar em algum lugar entre 1 e 2



Mas, onde ela está?

Bom, nós podemos examinar o ponto médio do intervalo



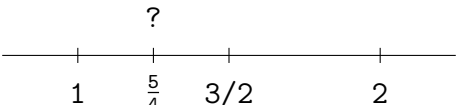
Daí, a gente aplica o raciocínio outra vez

- como $(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} > 2 = (\sqrt{2})^2$, nós temos que $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$

E agora, a gente descobriu que a $\sqrt{2}$ deve estar em algum lugar entre 1 e 3/2



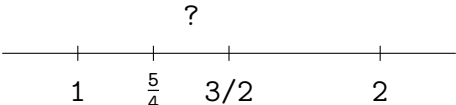
Daí, nós examinamos o ponto médio do intervalo que sobrou



Aplicamos o raciocínio outra vez

- como $(\frac{5}{4})^2 = \frac{25}{16} < 2 = (\sqrt{2})^2$, nós temos que $\frac{5}{4} < \sqrt{2}$

E daí, a gente descobre que a $\sqrt{2}$ deve estar em algum lugar entre 5/4 e 3/2



Os próximos passos são

- como $(\frac{11}{8})^2 = \frac{121}{64} < 2 = (\sqrt{2})^2$, nós temos que $\frac{11}{8} < \sqrt{2}$
- como $(\frac{23}{16})^2 = \frac{529}{256} > 2 = (\sqrt{2})^2$, nós temos que $\frac{23}{16} > \sqrt{2}$
- como $(\frac{45}{32})^2 = \frac{2025}{1024} < 2 = (\sqrt{2})^2$, nós temos que $\frac{45}{32} < \sqrt{2}$

Nesse ponto, nós já sabemos que

45/32 < sqrt(2) < 23/16

o que é a mesma coisa que

1,40625 < sqrt(2) < 1,4375

Mas, isso significa que se a $\sqrt{2}$ fosse um número, então ela começaria assim

1,4...

Porque todo número nesse intervalo começa desse jeito.

Legal.

E agora que a gente entendeu como a coisa funciona, a gente pode continuar repetindo o raciocínio.

Ou melhor, a gente pode escrever um programa de computador para fazer isso.

E quando a gente escreve esse programa e executa ele, o que a gente vê é o seguinte

P_sqrt -> 1,414213...

Quer dizer, a medida que o programa executa, ele vai espremendo a $\sqrt{2}$ em um intervalo cada vez mais estreito — (onde todo mundo começa do mesmo jeito ...)

E dessa maneira, nós vamos descobrindo os dígitos da $\sqrt{2}$.

Legal, não é?

Agora, o mais legal é que finalmente a gente pode responder a pergunta

- O que é a $\sqrt{2}$?

E a resposta é a seguinte

→ A $\sqrt{2}$ é o resultado de um programa que roda para sempre

Mas, quem garante que o programa vai rodar para sempre?

Bom, tem que rodar.

Porque toda vez que a gente examina o ponto médio de um intervalo, esse ponto médio é sempre um número racional — (porque?)

Daí que, a gente nunca encontra a $\sqrt{2}$.

E daí, a gente vai continuar procurando pra sempre.

Certo.

Mas, ainda tem uma outra coisa legal.

Quer dizer, a sequência de dígitos produzida pelo programa

P_sqrt -> 1,414213...

nunca entra em repetição.

Porque?

Bom, porque se entrasse em repetição, então a $\sqrt{2}$ seria um número racional.

Mas, a $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Logo, não entra em repetição.