

Mais números irracionais

Agora, a gente pode fazer a mesma coisa com o 3

3 → P√ → 1,732050...

Mas, quem disse que essa sequência nunca acaba ?

E quem disse que ela não entra em repetição ?

Bom, aqui a gente pode raciocinar do mesmo jeito outra vez.

Quer dizer, suponha que √3 é um número racional

√3 = a/b

Dai, a gente raciocina assim

=> 3 = a^2/b^2
=> a^2 = 3 · b^2
=> a é múltiplo de 3 — (porque?)
=> a = 3 · c
=> (3c)^2 = 3 · b^2
=> b^2 = 3 · c^2
=> b é múltiplo de 3 — (porque?)
=> b = 3 · d
=> (3d)^2 = 3 · c^2
=> c^2 = 3 · d^2
=> c é múltiplo de 3 — (porque?)
=> a é múltiplo de 9 — (porque?)
=> ...

Quer dizer, a coisa entra em repetição.

Logo, a e b podem ser divididos por qualquer potência de 3.

Só que isso não pode ser.

Logo, √3 é um número irracional.

Legal.

É claro que a gente pode fazer a mesma coisa com qualquer número primo p.

E a gente também pode dizer o seguinte

→ Se x não é um quadrado perfeito, então √x é um número irracional — (porque?)

Vejamos mais exemplos

Exemplos

a. Soma de irracionais

- O que é √2 + √3 ?

Bom, aqui a gente pode pensar que isso é uma soma de números irracionais.

Logo, o resultado também deve ser irracional.

Mas, nem sempre isso é verdade ...

Quer dizer, considere o número

0,121122111222...

Isso claramente é um número irracional — (porque não é repetitivo ... — ou será que é?)

Dai, somando a ele esse outro número irracional

0,212211222111...

a gente obtém

0,33333333333333...

que é um número racional.

Mas, voltando ao √2 + √3, a gente pode argumentar assim

- Se √2 + √3 fosse racional, então (√2 + √3)^2 também seria racional — (porque?)
- Mas, (√2 + √3)^2 = 5 + 2√2√3
- E aqui a gente observa que √2√3 é a coisa que multiplicada por ela mesma dá 6.
- Logo, a gente pode escrever (√2 + √3)^2 = 5 + 2√6
- Mas, isso não pode ser racional.
- Porque se fosse, então √6 também seria racional — (porque?)
- Só que isso não é verdade — (porque 6 não é um quadrado perfeito)
- Logo, (√2 + √3)^2 não é racional.
- E dai √2 + √3 também não é racional.

◇

b. Soma de racional e irracional

- O que é 2 + √5 ?

Bom, imagine que

2 + √5 = r

para algum número racional r.

Então, passando o 2 para o outro lado

√5 = r - 2

nós teríamos que √5 é um número racional.

Só que isso não é verdade.

Logo, 2 + √5 é irracional.

— (E um raciocínio parecido mostra que ao subtrair, multiplicar ou dividir um racional e um irracional, nós sempre obtemos um irracional)

◇

c. Um pequeno truque sujo^a

- O que é √3 + √[3]{3} ?

Bom, imagine que

√3 + √[3]{3} = R

para algum número racional R.

Dai, elevando os dois lados ao cubo, nós obtemos o seguinte

(√3)^3 + 3 · (√3)^2 · √[3]{3} + 3 · √3 · (√[3]{3})^2 + (√[3]{3})^3 = R^3

o que a gente reescreve assim

3 · √3 + 3^2 · √[3]{3} + 3 · √3 · (√[3]{3})^2 + 3 = R^3

Dai, o pequeno truque sujo é observar que

√[3]{3} = R - √3

Substituindo essa expressão na equação acima, nós obtemos

3 · √3 + 3^2 · (R - √3) + 3 · √3 · (R - √3)^2 + 3 = R^3

E agora, é só fazer conta.

O primeiro passo é reescrever a coisa assim

3 · √3 + 3^2 · √3 + 3 · √3 · (R^2 - 2R · √3 + 3) = R^3 - 3^2 · R - 3

e depois assim

3 · √3 + 3^2 · √3 + 3R^2 · √3 - 6R · 3 + 3^2 · √3 + = R^3 - 3^2 · R - 3

e depois assim

√3 · (3^2 + 3R^2 + 3^2) = R^3 - 3^2 · R - 3 + 6R · 3

e depois assim

√3 = (R^3 - 3^2 · R - 3 + 6R · 3) / (3^2 + 3R^2 + 3^2)

o que é uma contradição.

◇

d. A raiz quadrada da raiz quadrada de 2

Mas, existem outras possibilidades.

Por exemplo, nós podemos fazer o seguinte

2 → P√ → √2 → P√ → √√2

E agora?

Bom, a primeira coisa é que √√2 é a coisa que multiplicada por ela mesma dá √2.

Mas, √2 é a coisa que multiplicada por ela mesma dá 2.

Logo, √√2 é a coisa que multiplicada por ela mesma 4 vezes dá 2

√√2 · √√2 · √√2 · √√2 = 2

Dai que, a gente pode escrever assim

√√2 = √[4]{2}

E agora a gente pode perguntar

- O que é √[4]{2} ?

Bom, suponha que isso é um número racional

√[4]{2} = r

Então, elevando os dois lados ao quadrado, nós concluímos que

√2 = r^2

Mas, isso não pode ser.

Logo, √[4]{2} é um número irracional.

◇

^aMarcus Lucas, 2025.1