

Matemática Discreta

aula 11: Coisas estranhas no infinito

1 Introdução

Considere o conjunto dos números naturais

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

E agora considere esse outro conjunto

$$\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

A pergunta é

- Qual dos dois conjuntos é maior: $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{X}$?

Bom, a resposta é: *eles são a mesma coisa!*

Quer dizer, a gente pode reescrever o conjunto $\mathbb{X}$ assim

$$\mathbb{X} = \{0 + 1, 1 + 1, 2 + 1, 3 + 1, \dots\}$$

E agora é bem fácil de ver que $\mathbb{X}$ é só o conjunto $\mathbb{N}$ disfarçado.

Quer dizer, os elementos do conjunto $\mathbb{N}$ receberam o seguinte disfarce: $+ 1$.

Daí que, se a gente entender o que está fazendo, a gente pode escrever a coisa assim

$$\mathbb{X} = \mathbb{N} + 1$$

Legal.

Mas, essa não é a única maneira de ver as coisas.

Quer dizer, a gente também pode pensar que os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{X}$ são programas de computador

Prog N		Prog X
{		{
n <-- 0		n <-- 0
while (1 = 1)		while (1 = 1)
{		{
Print (n)		Print (n+1)
n ++		n ++
}		}
}		}

E agora, se alguém perguntar

- Qual programa imprime a maior quantidade de números ?

A gente responde: “Mas, os dois programas são a mesma coisa ...”

2 Os números naturais

Certo.

Então a gente já sabe que os seguintes conjuntos são todos a mesma coisa

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, \}$$

$$\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, \dots, \}$$

$$\mathbb{Y} = \{2, 3, 4, 5, \dots, \}$$

$$\mathbb{W} = \{3, 4, 5, 6, \dots, \}$$

...

Quer dizer, só o que nós temos aqui é o conjunto dos números naturais com vários disfarces diferentes — (*inclusive os números naturais pelados ...*)

Mas, e esse conjunto aqui

$$\mathbb{P} = \{0, 2, 4, 6, \dots, \}$$

Bom, isso é apenas um disfarce diferente

$$\begin{aligned}\mathbb{P} &= \{2 \cdot 0, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, \dots, \} \\ &= 2 \cdot \mathbb{N}\end{aligned}$$

E aqui, nós temos ainda uma outra forma de disfarçar o $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathbb{I} &= \{1, 3, 5, 7, \dots, \} \\ &= \{2 \cdot 0 + 1, 2 \cdot 1 + 1, 2 \cdot 2 + 1, 2 \cdot 3 + 1, \dots, \} \\ &= 2 \cdot \mathbb{N} + 1\end{aligned}$$

Agora, você consegue ver que $\mathbb{I}$ é apenas o conjunto $\mathbb{P}$ disfarçado?

Bom, isso é bem fácil de ver, porque

$$\mathbb{I} = \underbrace{2 \cdot \mathbb{N}}_{\mathbb{P}} + 1 = \mathbb{P} + 1$$

Mas, o $\mathbb{P}$ também é o conjunto $\mathbb{I}$ disfarçado

$$\mathbb{P} = 2 \cdot \mathbb{N} = \underbrace{2 \cdot \mathbb{N} + 1}_{\mathbb{I}} - 1 = \mathbb{I} - 1$$

E agora, já não é difícil ver que $\mathbb{N}$ também é o conjunto $\mathbb{P}$ disfarçado

$$\mathbb{N} = \frac{2 \cdot \mathbb{N}}{2} = \frac{\mathbb{P}}{2}$$

Legal.

Então tudo é a mesma coisa — (*ou quase tudo ...*)

Quer dizer, duas coisas são a mesma coisa se uma pode ser transformada na outra — (*por meio de um disfarce*)

- $\mathbb{N} \xrightarrow{2 \cdot x} \mathbb{P}$
- $\mathbb{N} \xrightarrow{2 \cdot x + 1} \mathbb{I}$
- $\mathbb{P} \xrightarrow{x + 1} \mathbb{I}$
- e por aí vai ...

Nos livros de matemática se diz que dois conjuntos X e Y tem a mesma *cardinalidade* se existe uma *função bijetiva* de X para Y — (*ou vice-versa ...*)

Vejamos mais um exemplo.

Considere o conjunto dos múltiplos de 3

$$M_3 = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$$

É bem fácil ver que M_3 e $\mathbb{N}$ tem a mesma cardinalidade

$$\begin{aligned} M_3 &= \{3 \cdot 0, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots\} \\ &= 3 \cdot \mathbb{N} \end{aligned}$$

Daí que

$$\mathbb{N} \xrightarrow{3 \cdot x} M_3$$

e a função bijetiva é assim

$$f(x) = 3 \cdot x$$

Mas, como é que a gente vê que M_3 e $\mathbb{P}$ são a mesma coisa?

Bom, M_3 e $\mathbb{P}$ são a mesma coisa que $\mathbb{N}$.

Logo, um é a mesma coisa que o outro.

Quer dizer,

$$M_3 = 3 \cdot \mathbb{N} = 3 \cdot \frac{\mathbb{P}}{2}$$

Daí que,

$$\mathbb{P} \xrightarrow{3 \cdot x/2} M_3$$

e a função bijetiva é

$$f(x) = \frac{3x}{2}$$

Mas, a gente também pode ver a coisa ao contrário

$$M_3 \xrightarrow{2 \cdot x/3} P$$

e daí, a função bijetiva é

$$f(x) = \frac{2x}{3}$$

3 Os números inteiros

Certo.

Agora, considere o conjunto dos não-múltiplos de 3

$$NM_3 = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots\}$$

E agora?

Bom, a intuição diz que isso é a mesma coisa que $\mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N} & = & \{0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \dots\} \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ NM_3 & = & \{1, & 2, & 4, & 5, & 7, & 8, & \dots\} \end{array}$$

Agora, a gente só precisa descobrir qual é o disfarce — (*ou qual é a bijeção ...*)

Bom, a ideia é dar disfarces diferentes para os pares e os ímpares.

E depois de pensar um pouquinho, a gente chega nisso aqui

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f(x)} NM_3$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2} + 1 & , \text{ se } x \text{ é par} \\ \frac{3(x-1)}{2} + 2 & , \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Mas, como é que a gente chega nessa regra?

Bom, a gente pode começar dividindo o NM_3 assim

$$NM_3 = \underbrace{\{1, 4, 7, \dots\}}_{M_3 + 1} + \underbrace{\{2, 5, 8, \dots\}}_{M_3 + 2}$$

Daí, a gente observa que

$$\mathbb{N} \xrightarrow{3 \cdot x + 1} M_3 + 1$$

$$\mathbb{N} \xrightarrow{3 \cdot x + 2} M_3 + 2$$

Quer dizer, NM_3 é a mesma coisa que duas cópias de $\mathbb{N}$ — (*disfarçadas ...*)

Nesse ponto, a gente observa que também existem duas cópias de $\mathbb{N}$ dentro de $\mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{P} & \xrightarrow{x/2} \mathbb{N} \\ \mathbb{N} & = & + \\ & \mathbb{I} & \xrightarrow{(x-1)/2} \mathbb{N} \end{array}$$

E agora é fácil: basta juntar uma coisa com a outra

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P} & \xrightarrow{x/2} & \mathbb{N} & \xrightarrow{3 \cdot x + 1} & M_3 + 1 \\ \mathbb{N} & = & + & & + = NM_3 \\ \mathbb{I} & \xrightarrow{(x-1)/2} & \mathbb{N} & \xrightarrow{3 \cdot x + 2} & M_3 + 2 \end{array}$$

Seguindo pelo caminho de cima

$$x \xrightarrow{\frac{o}{2}} \frac{x}{2} \xrightarrow{3 \cdot o + 1} 3 \cdot \left(\frac{x}{2} \right) + 1$$

a gente obtém a regra

$$\mathbb{P} \xrightarrow{\frac{3x}{2} + 1} M_3 + 1$$

E seguindo pelo caminho de baixo

$$x \xrightarrow{\frac{o-1}{2}} \frac{x-1}{2} \xrightarrow{3 \cdot o + 2} 3 \cdot \left(\frac{x-1}{2} \right) + 2$$

a gente obtém a regra

$$\mathbb{I} \xrightarrow{\frac{3(x-1)}{2} + 2} M_3 + 2$$

E assim, nós chegamos na bijeção

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2} + 1 & , \text{ se } x \text{ é par} \\ \frac{3(x-1)}{2} + 2 & , \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Os números inteiros

Legal.

O próximo passo é considerar o conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Bom, aqui nós temos dois infinitos

$$\mathbb{Z} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \} + \{ -1, -2, -3, \dots \}$$

Mas, a gente já sabe que isso não é um problema.

Porque também existem dois infinitos dentro de $\mathbb{N}$.

Daí que, a gente começa com a seguinte observação

$$\mathbb{N} \xrightarrow{x} \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N} \xrightarrow{-x-1} \{-1, -2, -3, \dots\}$$

E depois, a gente completa o esquema assim

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathbb{P} & \xrightarrow{x/2} & \mathbb{N} & \xrightarrow{x} & \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\ \mathbb{N} & = & + & & & + & = \mathbb{Z} \\ & \mathbb{I} & \xrightarrow{(x-1)/2} & \mathbb{N} & \xrightarrow{-x-1} & \{-1, -2, -3, \dots\} \end{array}$$

Quer dizer, a seguinte bijeção

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f(x)} \mathbb{Z}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , \text{ se } x \text{ é par} \\ -\left(\frac{x-1}{2}\right) - 1 & , \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

demonstra que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ possuem a mesma cardinalidade.

4 Os números racionais

Considere o conjunto dos não-múltiplos de 4

$$\text{NM}_4 = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, \dots\}$$

Bom, agora já é bem fácil ver que isso é apenas o conjunto $\mathbb{N}$ disfarçado.

Quer dizer, a gente observa que existem 3 infinitos aqui

$$\text{NM}_4 = \{1, 5, 9, \dots\} + \{2, 6, 10, \dots\} + \{3, 7, 11, \dots\}$$

Mas, também existem 3 infinitos dentro de $\mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{M}_3 & \xrightarrow{x/3} & \mathbb{N} \\ & + & & \\ \mathbb{N} & = & \text{M}_3 + 1 & \xrightarrow{(x-1)/3} & \mathbb{N} \\ & + & & \\ & \text{M}_3 + 2 & \xrightarrow{(x-2)/3} & \mathbb{N} \end{array}$$

Daí, a gente pode montar o seguinte esquema

$$\begin{array}{ccccccc}
 & M_3 & \xrightarrow{x/3} & \mathbb{N} & \xrightarrow{4x+1} & \{1, 5, 9, \dots\} & \\
 & + & & & & + & \\
 \mathbb{N} & = & M_3 + 1 & \xrightarrow{(x-1)/3} & \mathbb{N} & \xrightarrow{4x+2} & \{2, 6, 10, \dots\} & = & NM_4 \\
 & + & & & & + & \\
 & M_3 + 2 & \xrightarrow{(x-2)/3} & \mathbb{N} & \xrightarrow{4x+3} & \{3, 7, 11, \dots\} &
 \end{array}$$

E isso nos dá a seguinte bijeção

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N} & \xrightarrow{f(x)} & NM_4 \\
 \\
 f(x) & = & \begin{cases} 4 \cdot \left(\frac{x}{3}\right) + 1 & , \text{ se } x \text{ tem a forma } 3k \\ 4 \cdot \left(\frac{x-1}{3}\right) + 2 & , \text{ se } x \text{ tem a forma } 3k+1 \\ 4 \cdot \left(\frac{x-2}{3}\right) + 3 & , \text{ se } x \text{ tem a forma } 3k+2 \end{cases}
 \end{array}$$

Certo.

Mas, essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, a gente precisa de 3 infinitos.

E a gente vai obter o primeiro infinito assim

$$\begin{array}{ccc}
 & I & \xrightarrow{(x-1)/2} \mathbb{N} \\
 \mathbb{N} & = & + \\
 & P &
 \end{array}$$

Daí, o segundo infinito a gente obtém assim

$$\begin{array}{ccccccc}
 & I & \xrightarrow{(x-1)/2} & \mathbb{N} & & & \\
 \mathbb{N} & = & + & & & I & \xrightarrow{(x-1)/2} \mathbb{N} \\
 & P & \xrightarrow{x/2} & \mathbb{N} & = & + & \\
 & & & & & P &
 \end{array}$$

E agora, a gente pode usar o P que sobrou para obter o terceiro infinito.

Mas, o ponto não é esse.

Quer dizer, o ponto é que a gente entrou em repetição.

E utilizando essa ideia, a gente pode tirar quantos infinitos a gente quiser de dentro de $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \begin{array}{c} \mathbb{I} \xrightarrow{(x-1)/2} \mathbb{N} \\ + \\ \mathbb{P} \xrightarrow{x/2} \mathbb{N} \end{array} = \begin{array}{c} \mathbb{I} \xrightarrow{(x-1)/2} \mathbb{N} \\ + \\ \mathbb{P} \quad (\dots) \end{array}$$

De fato, a gente pode repetir esse truque para sempre.

E dessa maneira, a gente consegue tirar infinitas cópias de $\mathbb{N}$ de dentro de $\mathbb{N}$

— (*o infinito é um saco sem fundo ...*)

Legal.

Agora considere esse conjunto aqui

$$\mathbb{Q} = \text{o conjunto dos números racionais}$$

e a seguinte pergunta

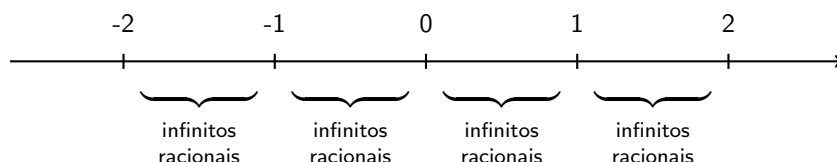
- Será que $\mathbb{Q}$ tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{N}$?

Bom, vamos ver.

Quer dizer, a gente começa perguntando: *quantos infinitos tem dentro de $\mathbb{Q}$?*

Só que isso depende de como se olha.

Quer dizer, se a gente olhar para a reta dos números, a gente vê que todo intervalo contém infinitos racionais



Mas, a gente também pode olhar para os racionais assim

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & -\frac{3}{1}, & -\frac{2}{1}, & -\frac{1}{1}, & \frac{0}{1}, & \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{3}{1}, & \dots \\ \dots & -\frac{3}{2}, & -\frac{2}{2}, & -\frac{1}{2}, & \frac{0}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{2}{2}, & \frac{3}{2}, & \dots \\ \dots & -\frac{3}{3}, & -\frac{2}{3}, & -\frac{1}{3}, & \frac{0}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{3}, & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Quer dizer, em cada linha nós temos os racionais com um certo denominador.

E nós temos infinitas linhas.

Para simplificar as coisas, a gente pode considerar apenas a parte positiva de $\mathbb{Q}$ — (*porque?*)

E daí, a gente pode escrever a coisa assim

$$\mathbb{Q}^+ = \frac{\mathbb{N}}{1} + \frac{\mathbb{N}}{2} + \frac{\mathbb{N}}{3} + \frac{\mathbb{N}}{4} + \dots$$

Quer dizer, existem infinitas cópias (disfarçadas) de $\mathbb{N}$ dentro de $\mathbb{Q}^+$.

E agora, a gente pode montar o esquema

$$\begin{array}{l} \mathbb{I} \xrightarrow{\frac{x-1}{2}} \mathbb{N} \xrightarrow{x/1} \frac{\mathbb{N}}{1} \\ \\ \mathbb{N} = + \mathbb{I} \xrightarrow{\frac{x-1}{2}} \mathbb{N} \xrightarrow{x/2} \frac{\mathbb{N}}{2} \\ \\ \mathbb{P} \xrightarrow{x/2} \mathbb{N} = + \mathbb{I} \xrightarrow{\frac{x-1}{2}} \mathbb{N} \xrightarrow{x/3} \frac{\mathbb{N}}{3} \\ \\ \mathbb{P} \xrightarrow{x/2} \mathbb{N} = + \mathbb{P} \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right) \end{array}$$

Legal.

Mas, qual é a função associada a esse esquema?

Bom, seguindo os caminhos no esquema, a gente obtém o seguinte

$$\begin{array}{l} \mathbb{N} \xrightarrow{\frac{(x-1)/2}{1}} \frac{\mathbb{N}}{1} \quad , \text{ quando } x \text{ é ímpar} \\ \\ \mathbb{N} \xrightarrow{\frac{(\frac{x}{2}-1)/2}{2}} \frac{\mathbb{N}}{2} \quad , \text{ quando } x \text{ é } 2 \text{ vezes um ímpar} \\ \\ \mathbb{N} \xrightarrow{\frac{(\frac{x}{4}-1)/2}{3}} \frac{\mathbb{N}}{3} \quad , \text{ quando } x \text{ é } 2^2 \text{ vezes um ímpar} \end{array}$$

Daí que, isso nos dá a função

$$f(x) = \frac{\left(\frac{x}{2^k} - 1\right)/2}{k+1} \quad , \text{ quando } x \text{ tem a forma } 2^k \times \text{ímpar}$$

Certo.

Mas, nós ainda temos um probleminha.

Quer dizer, essa função não é uma bijeção — (*porque?*)

Mas, ela é uma sobrejeção.

Quer dizer, todo elemento de $\mathbb{Q}^+$ é alcançado por ao menos um elemento de $\mathbb{N}$ — (*porque?*)

Daí que, a gente pode concluir que $\mathbb{N}$ é ao menos tão grande quanto $\mathbb{Q}^+$ — (*porque?*)

$$|\mathbb{N}| \geq |\mathbb{Q}^+|$$

Por outro lado, é bem fácil conseguir uma sobrejeção de $\mathbb{Q}^+$ para $\mathbb{N}$ — (*porque?*)

Logo, $\mathbb{Q}^+$ é ao menos tão grande quanto $\mathbb{N}$ — (*porque?*)

$$|\mathbb{Q}^+| \geq |\mathbb{N}|$$

Daí, juntando as duas coisas, a gente chega a

$$|\mathbb{Q}^+| = |\mathbb{N}|$$

5 Os números irracionais

Finalmente, chegou a hora de considerar

$$\mathbb{I} = \text{o conjunto dos números irracionais}$$

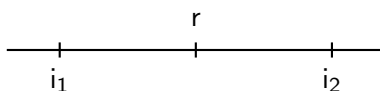
E a pergunta é

- *Será que $\mathbb{I}$ tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{N}$?*

Bom, vamos ver.

Quer dizer, a gente começa com a seguinte observação

Fato 1: *Entre todo par de irracionais na reta dos números, existe um número racional.*



Como é que a gente vê isso?

Bom, a gente já sabe que os irracionais são os números não repetitivos.

Daí, a gente escreve as sequências infinitas de dígitos de i_1 e i_2

$$i_1 = X, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots$$

$$i_2 = X, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots$$

— (*aqui, a gente está assumindo que i_1 e i_2 tem a mesma parte inteira, mas isso não é importante — porque?*)

Como os dois números são diferentes, em algum momento a gente encontra um dígito diferente

$$i_1 = X, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots$$

$$i_2 = X, a_1 a_2 a_3 a_4 b_5 \dots$$

↑

Além disso, suponha que $b_5 > a_5$.

A ideia então, é considerar o seguinte número racional

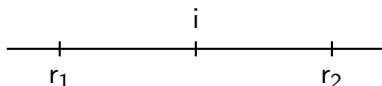
$$r = X, a_1 a_2 a_3 a_4 b_5$$

E não é difícil de ver que

$$i_1 < r < i_2$$

A seguinte observação é a seguinte

Fato 2: *Entre todo par de racionais na reta dos números, existe um número irracional.*



Como é que a gente vê isso?

Bom, a gente também escreve as sequências de dígitos dos dois números racionais

— (*infinitas ou não*)

$$r_1 = X, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots$$

$$r_2 = X, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots$$

e localiza o primeiro dígito diferente

$$r_1 = X, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots$$

$$r_2 = X, a_1 a_2 a_3 a_4 b_5 \dots$$

↑

— (*com $a_5 < b_5$*)

Daí, a gente considera o seguinte número irracional

$$i = X, a_1 a_2 a_3 a_4 b_5 + \frac{\sqrt{2}}{10^k}$$

onde k é um número bem grande.

É bem fácil ver que i é um número irracional.

E nós também temos que

$$r_1 < i < r_2$$

Legal.

Os fatos 1 e 2 nos dão a ideia de que os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ tem o mesmo tamanho.

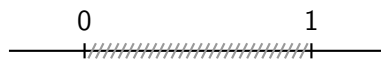
Mas, nós já sabemos que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ tem o mesmo tamanho.

Logo, nós chegamos à ideia de que $\mathbb{I}$ e $\mathbb{N}$ tem o mesmo tamanho.

Só que isso não é verdade ...

Quer dizer, a maneira de ver isso é um pouco indireta.

A ideia é mostrar que o intervalo de números reais



possui cardinalidade maior que $\mathbb{N}$.

Esse intervalo possui números racionais e irracionais.

Mas, a contribuição dos racionais é no máximo a cardinalidade de $\mathbb{N}$.

Logo, os irracionais tem uma contribuição maior do que a cardinalidade de $\mathbb{N}$.

Logo, o conjunto $\mathbb{I}$ tem cardinalidade maior que $\mathbb{N}$.

Mas, para chegar a essa conclusão é preciso mostrar que $(0,1)$ tem cardinalidade maior que $\mathbb{N}$.

E para fazer isso, é mais fácil raciocinar na base 2.

Quer dizer, na base 2 os elementos do intervalo $(0,1)$ corresponde a sequências infinitas da forma

$$(0, 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ \dots)_2$$

Quando o número é racional essa sequência é repetitiva.

E quando o número é irracional ela não é.

Mas, isso não importa.

O ponto é que nós vamos apresentar um argumento por contradição.

Quer dizer, suponha que o conjunto $\mathbb{N}$ e o intervalo $(0,1)$ tem a mesma cardinalidade.

Então, existe uma função bijetiva

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f(x)} (0,1)$$

Daí, a gente pode usar essa função para construir uma tabela (infinita), com todos os números naturais e os elementos de $(0,1)$ associados a eles

$\mathbb{N}$	$(0,1)$
0	$(0, 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ \dots)_2$
1	$(0, 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ \dots)_2$
2	$(0, 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ \dots)_2$
3	$(0, 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ \dots)_2$
$\vdots$	$\dots \quad \dots$

O ponto importante é que todos os elementos do intervalo $(0,1)$ aparecem nessa tabela — (*porque?*)

Mas agora, nós vamos encontrar um elemento que não está na tabela.

Quer dizer, a ideia é olhar para a diagonal

$\mathbb{N}$	$(0, 1)$
0	$(0, 0 \text{ } \cancel{1} \text{ } 1 \text{ } 0 \text{ } 1 \text{ } 0 \text{ } 0 \text{ } 1 \text{ } 0 \text{ } \dots)_2$
1	$(0, 1 \text{ } \cancel{1} \text{ } 0 \text{ } 0 \text{ } 0 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 0 \text{ } \dots)_2$
2	$(0, 1 \text{ } 0 \text{ } \cancel{1} \text{ } 1 \text{ } 0 \text{ } 0 \text{ } 1 \text{ } 0 \text{ } 1 \text{ } \dots)_2$
3	$(0, 0 \text{ } 0 \text{ } 0 \text{ } \cancel{1} \text{ } 0 \text{ } 0 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } \dots)_2$
$\vdots$	$\dots \quad \dots$

E daí, a gente monta o nosso número invertendo o bit da diagonal em cada linha

$$x = (0, 1 \text{ } 0 \text{ } 0 \text{ } 0 \text{ } \dots)_2$$

A ideia é que o número x não está na tabela.

Quer dizer, para qualquer número natural k , nós temos que x é diferente do elemento que está associado a k na tabela.

Porque o $(k + 1)$ -ésimo bit de x é diferente do $(k + 1)$ -ésimo bit desse elemento — (*i.e.*, *o bit da diagonal ...*)

Logo, x não está na tabela.

Mas, isso contradiz o fato de que $f(x)$ é bijetiva.

Logo, o intervalo $(0, 1)$ e o conjunto $\mathbb{N}$ não possuem a mesma cardinalidade.

Exemplos

a. Os números reais

(. . .)

◇

b. O conjunto $\mathbb{R}^2$

(. . .)

◇

c. O conjunto de Cantor

(. . .)

◇