

Matemática Discreta

lista de exercícios 09

1. Enumerabilidade natural

Argumente que

- a) O conjunto dos quadrados perfeitos tem a mesma cardinalidade que o conjunto $\mathbb{N}$.
- b) O conjunto dos não-quadrados perfeitos tem a mesma cardinalidade que o conjunto $\mathbb{N}$.
- c) O conjunto dos inteiros positivos múltiplos de 3 tem a mesma cardinalidade que o conjunto dos inteiros que não são múltiplos de 3 (i.e., positivos e negativos).

2. Mais enumerabilidade

Escolha um par de conjuntos abaixo, e argumente que eles possuem o mesmo tamanho

- $A = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots \}$
- $B = \{ 1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots \}$
- $C = \{ \dots, -27, -9, -3, -1, 1, 3, 9, 27, \dots \}$
- $D = \{ 1 \cdot 2^1, 2 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, 4 \cdot 2^4, 5 \cdot 2^5, 6 \cdot 2^6, \dots \}$

3. Enumerabilidade irracional

Nós vimos na aula 09 que o conjunto de todos os irracionais é maior do que o conjunto $\mathbb{N}$.

Mas, e se a gente pegar só uma parte dos números irracionais?

Vejamos.

Considere os números irraciocionais que tem o seguinte formato

$$0, \underbrace{d_1 d_1}_{\text{2 dígitos}}, \underbrace{d_2 d_2 d_2 d_2}_{\text{4 dígitos}}, \underbrace{d_3 d_3 d_3 d_3 d_3 d_3}_{\text{6 dígitos}}, \dots$$

isto é

- os 2 primeiros dígitos depois da vírgula são iguais
- depois, os 4 próximos dígitos são iguais
- depois, os 8 próximos dígitos são iguais

e por aí vai ...

Por exemplo,

$$0, 1 1 2 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 \dots$$

$$0, 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 \dots$$

Defina C_1 como o conjunto de todos os números que tem esse formato.

Agora, considere os números irracionais que tem o seguinte formato

$$0, \underbrace{d_1 d_2 \dots, d_k}_{\text{primeiro aparece um número arbitrário } k \text{ de dígitos (depois da vírgula)}}, \underbrace{d_1 d_1 d_2 d_2 \dots, d_k d_k}_{\text{depois os mesmos dígitos aparecem duplicados}}, \underbrace{d_1 d_1 d_1 d_1 \dots d_k d_k d_k d_k}_{\text{depois os mesmos dígitos aparecem quadruplicados}} \dots$$

isto é

- primeiro aparece um número arbitrário k de dígitos (depois da vírgula)
- depois os mesmos dígitos aparecem duplicados
- depois os mesmos dígitos aparecem quadruplicados

e por aí vai ...

Por exemplo,

$$0, 1 2 1 1 2 2 1 1 1 2 2 2 \dots$$

$$0, 3 2 1 3 3 2 2 1 1 3 3 3 2 2 2 2 1 1 1 1 \dots$$

Defina C_2 como o conjunto de todos os números que tem esse formato.

Bom, um desses conjuntos tem o mesmo tamanho que $\mathbb{N}$.

E o outro é maior que o conjunto $\mathbb{N}$

Você deve descobrir quem é quem.

E depois, você deve

- a) Argumentar que o menor deles tem o mesmo tamanho que $\mathbb{N}$
- b) Argumentar que o maior deles é estritamente maior que $\mathbb{N}$

4. Programa de computador

Um programa de computador também pode provar que um conjunto infinito X tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{N}$.

Quer dizer, a ideia é que o programa vai imprimir os elementos de X um a um

$x_1,$
 $x_2,$
 $x_3,$
 $x_4,$
 $\dots$

— (o programa vai rodar para sempre ...)

Daí, se você conseguir argumentar que todo elemento de X aparece na tela em algum momento, então o seu programa é uma função sobrejetiva de $\mathbb{N}$ em X .

E isso basta para provar que X tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{N}$.

Utilize esse método para demonstrar que os seguintes conjuntos tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{N}$

a) O conjunto dos pares ordenados de números naturais.

Por exemplo,

$$(0, 2), \quad (10, 1), \quad (8, 7), \quad (3, 17), \quad \dots$$

mas o seu programa precisa imprimir todos eles ...

b) O conjunto de triplas ordenadas de números naturais.

Por exemplo,

$$(0, 2, 0), \quad (10, 1, 9), \quad (8, 7, 1), \quad (3, 17, 20), \quad \dots$$

mas o seu programa precisa imprimir todas elas ...

c) O conjunto dos pares ordenados de números inteiros.

Por exemplo,

$$(0, -2, 0), \quad (-10, 1, 9), \quad (8, -7, -1), \quad (-3, 17, -20), \quad \dots$$

mas o seu programa precisa imprimir todas elas ...

5. O jogo da meia-noite

Juquinha e Mariazinha estão participando de um jogo que começa às 11 horas da noite e termina à meia-noite.

O jogo funciona assim:

- Às 11 horas, Juquinha e Mariazinha recebem 2 bombons cada um, com os números 1 e 2, que eles devem colocar cada um na sua caixa.
Daí, cada um deles pode escolher um dos bombons da sua caixa para comer.
- Às 11:30 a coisa se repete, com bombons numerados com 3 e 4.
- Às 11:45 a coisa se repete, com bombons numerados com 5 e 6.
- e assim por diante, com infinitas rodadas até a meia-noite.

Mariazinha sempre escolhe o bombom da caixa com o maior número para comer.

E Juquinha sempre escolhe o bombom da caixa com o menor número para comer.

Logo depois da meia noite, quem tem mais bombons na sua caixa?