

Os números naturais

Certo.

Então a gente já sabe que os seguintes conjuntos são todos a mesma coisa

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, \dots, \} \\ \mathbb{X} &= \{1, 2, 3, 4, \dots, \} \\ \mathbb{Y} &= \{2, 3, 4, 5, \dots, \} \\ \mathbb{W} &= \{3, 4, 5, 6, \dots, \} \\ &\dots\end{aligned}$$

Quer dizer, só o que nós temos aqui é o conjunto dos números naturais com vários disfarces diferentes — *(inclusive os números naturais pelados ...)*

Mas, e esse conjunto aqui

$$\mathbb{P} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

Bom, isso é apenas um disfarce diferente

$$\begin{aligned}\mathbb{P} &= \{2 \cdot 0, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, \dots\} \\ &= 2 \cdot \mathbb{N}\end{aligned}$$

E aqui, nós temos ainda uma outra forma de disfarçar o $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathbb{I} &= \{1, 3, 5, 7, \dots\} \\ &= \{2 \cdot 0 + 1, 2 \cdot 1 + 1, 2 \cdot 2 + 1, 2 \cdot 3 + 1, \dots\} \\ &= 2 \cdot \mathbb{N} + 1\end{aligned}$$

Agora, você consegue ver que $\mathbb{I}$ é apenas o conjunto $\mathbb{P}$ disfarçado?

Bom, isso é bem fácil de ver, porque

$$\mathbb{I} = \underbrace{2 \cdot \mathbb{N}}_{\mathbb{P}} + 1 = \mathbb{P} + 1$$

Mas, o $\mathbb{P}$ também é o conjunto $\mathbb{I}$ disfarçado

$$\mathbb{P} = 2 \cdot \mathbb{N} = \underbrace{2 \cdot \mathbb{N} + 1}_{\mathbb{I}} - 1 = \mathbb{I} - 1$$

E agora, já não é difícil ver que $\mathbb{N}$ também é o conjunto $\mathbb{P}$ disfarçado

$$\mathbb{N} = \frac{2 \cdot \mathbb{N}}{2} = \frac{\mathbb{P}}{2}$$

Legal.

Então tudo é a mesma coisa — *(ou quase tudo ...)*

Quer dizer, duas coisas são a mesma coisa se uma pode ser transformada na outra

— *(por meio de um disfarce)*

- $\mathbb{N} \xrightarrow{2 \cdot x} \mathbb{P}$
- $\mathbb{N} \xrightarrow{2 \cdot x + 1} \mathbb{I}$
- $\mathbb{P} \xrightarrow{x + 1} \mathbb{I}$
- e por aí vai ...

Nos livros de matemática se diz que dois conjuntos X e Y tem a mesma *cardinalidade* se existe uma *função bijetiva* de X para Y — *(ou vice-versa ...)*

Vejamos mais um exemplo.

Considere o conjunto dos múltiplos de 3

$$\mathbb{M}_3 = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$$

É bem fácil ver que $\mathbb{M}_3$ e $\mathbb{N}$ tem a mesma cardinalidade

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_3 &= \{3 \cdot 0, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots\} \\ &= 3 \cdot \mathbb{N}\end{aligned}$$

Daí que

$$\mathbb{N} \xrightarrow{3 \cdot x} \mathbb{M}_3$$

e a função bijetiva é assim

$$f(x) = 3 \cdot x$$

Mas, como é que a gente vê que $\mathbb{M}_3$ e $\mathbb{P}$ são a mesma coisa?

Bom, $\mathbb{M}_3$ e $\mathbb{P}$ são a mesma coisa que $\mathbb{N}$.

Logo, um é a mesma coisa que o outro.

Quer dizer,

$$\mathbb{M}_3 = 3 \cdot \mathbb{N} = 3 \cdot \frac{\mathbb{P}}{2}$$

Daí que,

$$\mathbb{P} \xrightarrow{3 \cdot x/2} \mathbb{M}_3$$

e a função bijetiva é

$$f(x) = \frac{3x}{2}$$

Mas, a gente também pode ver a coisa ao contrário

$$\mathbb{M}_3 \xrightarrow{2 \cdot x/3} \mathbb{P}$$

e daí, a função bijetiva é

$$f(x) = \frac{2x}{3}$$