

Os números inteiros

Agora, considere o conjunto dos não-múltiplos de 3

$$\mathbf{NM}_3 = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots\}$$

E agora?

Bom, a intuição diz que isso é a mesma coisa que $\mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N} & = & \{0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \dots\} \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbf{NM}_3 & = & \{1, & 2, & 4, & 5, & 7, & 8, & \dots\} \end{array}$$

Agora, a gente só precisa descobrir qual é o disfarce — (*ou qual é a bijeção ...*)

Bom, a ideia é dar disfarces diferentes para os pares e os ímpares.

E depois de pensar um pouquinho, a gente chega nisso aqui

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f(x)} \mathbf{NM}_3$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2} + 1 & , \text{ se } x \text{ é par} \\ \frac{3(x-1)}{2} + 2 & , \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Mas, como é que a gente chega nessa regra?

Bom, a gente pode começar dividindo o $\mathbf{NM}_3$ assim

$$\mathbf{NM}_3 = \underbrace{\{1, 4, 7, \dots\}}_{\mathbf{M}_3 + 1} + \underbrace{\{2, 5, 8, \dots\}}_{\mathbf{M}_3 + 2}$$

Daiá, a gente observa que

$$\mathbb{N} \xrightarrow{3 \cdot x + 1} \mathbf{M}_3 + 1$$

$$\mathbb{N} \xrightarrow{3 \cdot x + 2} \mathbf{M}_3 + 2$$

Quer dizer, $\mathbf{NM}_3$ é a mesma coisa que duas cópias de $\mathbb{N}$ — (*disfarçadas ...*)

Nesse ponto, a gente observa que também existem duas cópias de $\mathbb{N}$ dentro de $\mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} & \xrightarrow{x/2} & \mathbb{N} \\ \mathbb{N} & = & + \\ \mathbf{I} & \xrightarrow{(x-1)/2} & \mathbb{N} \end{array}$$

E agora é fácil: basta juntar uma coisa com a outra

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{P} & \xrightarrow{x/2} & \mathbb{N} & \xrightarrow{3 \cdot x + 1} & \mathbf{M}_3 + 1 \\ \mathbb{N} & = & + & & + & = & \mathbf{NM}_3 \\ \mathbf{I} & \xrightarrow{(x-1)/2} & \mathbb{N} & \xrightarrow{3 \cdot x + 2} & \mathbf{M}_3 + 2 \end{array}$$

Seguindo pelo caminho de cima

$$x \xrightarrow{\frac{o}{2}} \frac{x}{2} \xrightarrow{3 \cdot o + 1} 3 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) + 1$$

a gente obtém a regra

$$\mathbf{P} \xrightarrow{\frac{3x}{2} + 1} \mathbf{M}_3 + 1$$

E seguindo pelo caminho de baixo

$$x \xrightarrow{\frac{o-1}{2}} \frac{x-1}{2} \xrightarrow{3 \cdot o + 2} 3 \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right) + 2$$

a gente obtém a regra

$$\mathbf{I} \xrightarrow{\frac{3(x-1)}{2} + 2} \mathbf{M}_3 + 2$$

E assim, nós chegamos na bijeção

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2} + 1 & , \text{ se } x \text{ é par} \\ \frac{3(x-1)}{2} + 2 & , \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Os números inteiros

Legal.

O próximo passo é considerar o conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Bom, aqui nós temos dois infinitos

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} + \{-1, -2, -3, \dots\}$$

Mas, a gente já sabe que isso não é um problema.

Porque também existem dois infinitos dentro de $\mathbb{N}$.

Daiá que, a gente começa com a seguinte observação

$$\mathbb{N} \xrightarrow{x} \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N} \xrightarrow{-x-1} \{-1, -2, -3, \dots\}$$

E depois, a gente completa o esquema assim

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{P} & \xrightarrow{x/2} & \mathbb{N} & \xrightarrow{x} & \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\ \mathbb{N} & = & + & & + & = & \mathbb{Z} \\ \mathbf{I} & \xrightarrow{(x-1)/2} & \mathbb{N} & \xrightarrow{-x-1} & \{-1, -2, -3, \dots\} \end{array}$$

Quer dizer, a seguinte bijeção

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f(x)} \mathbb{Z}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , \text{ se } x \text{ é par} \\ -\left(\frac{x-1}{2}\right) - 1 & , \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

demonstra que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ possuem a mesma cardinalidade.