

Os números racionais

Considere o conjunto dos não-múltiplos de 4

NM4 = { 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, ... }

Bom, agora já é bem fácil ver que isso é apenas o conjunto N disfarçado.

Quer dizer, a gente observa que existem 3 infinitos aqui

NM4 = { 1, 5, 9, ... } + { 2, 6, 10, ... } + { 3, 7, 11, ... }

Mas, também existem 3 infinitos dentro de N

N = M3 + M3+1 + M3+2

Daí, a gente pode montar o seguinte esquema

N = M3 + M3+1 + M3+2 = { 1, 5, 9, ... } + { 2, 6, 10, ... } + { 3, 7, 11, ... } = NM4

E isso nos dá a seguinte bijeção

N -> NM4

f(x) = { 4 * (x/3) + 1, se x tem a forma 3k; 4 * ((x-1)/3) + 2, se x tem a forma 3k+1; 4 * ((x-2)/3) + 3, se x tem a forma 3k+2 }

Certo.

Mas, essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, a gente precisa de 3 infinitos.

E a gente vai obter o primeiro infinito assim

N = I + P

Daí, o segundo infinito a gente obtém assim

N = I + P = I + P

E agora, a gente pode usar o P que sobrou para obter o terceiro infinito.

Mas, o ponto não é esse.

Quer dizer, o ponto é que a gente entrou em repetição.

E utilizando essa ideia, a gente pode tirar quantos infinitos a gente quiser de dentro de N

N = I + P = I + P (. . .)

De fato, a gente pode repetir esse truque para sempre.

E dessa maneira, a gente consegue tirar infinitas cópias de N de dentro de N

— (o infinito é um saco sem fundo ...)

Legal.

Agora considere esse conjunto aqui

Q = o conjunto dos números racionais

e a seguinte pergunta

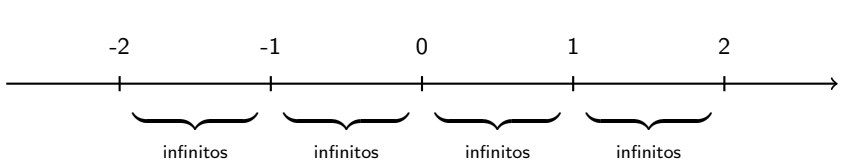
- Será que Q tem a mesma cardinalidade que N ?

Bom, vamos ver.

Quer dizer, a gente começa perguntando: quantos infinitos tem dentro de Q?

Só que isso depende de como se olha.

Quer dizer, se a gente olhar para a reta dos números, a gente vê que todo intervalo contém infinitos racionais



Mas, a gente também pode olhar para os racionais assim

Matriz de frações com denominadores 1, 2, 3 e numeradores variando de -3 a 3.

Quer dizer, em cada linha nós temos os racionais com um certo denominador.

E nós temos infinitas linhas.

Para simplificar as coisas, a gente pode considerar apenas a parte positiva de Q — (porque?)

E daí, a gente pode escrever a coisa assim

Q+ = N/1 + N/2 + N/3 + N/4 + ...

Quer dizer, existem infinitas cópias (disfarçadas) de N dentro de Q+.

E agora, a gente pode montar o esquema

N = I + P = I + P

Legal.

Mas, qual é a função associada a esse esquema?

Bom, seguindo os caminhos no esquema, a gente obtém o seguinte

N -> N/1, N/2, N/3

Daí que, isso nos dá a função

f(x) = ((x/2^k) - 1) / (k + 1)

Certo.

Mas, nós ainda temos um probleminha.

Quer dizer, essa função não é uma bijeção — (porque?)

Mas, ela é uma sobrejeção.

Quer dizer, todo elemento de Q+ é alcançado por ao menos um elemento de N — (porque?)

Daí que, a gente pode concluir que N é ao menos tão grande quanto Q+ — (porque?)

|N| >= |Q+|

Por outro lado, é bem fácil conseguir uma sobrejeção de Q+ para N — (porque?)

Logo, Q+ é ao menos tão grande quanto N — (porque?)

|Q+| >= |N|

Daí, juntando as duas coisas, a gente chega a

|Q+| = |N|