

Os números irracionais

Finalmente, chegou a hora de considerar

$$\mathbb{I} \quad = \quad \text{o conjunto dos números irracionais}$$

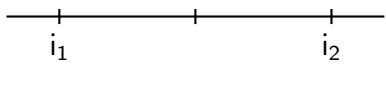
E a pergunta é

- *Será que $\mathbb{I}$ tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{N}$?*

Bom, vamos ver.

Quer dizer, a gente começa com a seguinte observação

Fato 1: *Entre todo par de irracionais na reta dos números, existe um número racional.*



Como é que a gente vê isso?

Bom, a gente já sabe que os irracionais são os números não repetitivos.

Dai, a gente escreve as sequências infinitas de dígitos de i_1 e i_2

$$i_1 \quad = \quad X, \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ \dots$$

$$i_2 \quad = \quad X, \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ \dots$$

— *(aqui, a gente está assumindo que i_1 e i_2 tem a mesma parte inteira, mas isso não é importante porque?)*

Como os dois números são diferentes, em algum momento a gente encontra um dígito diferente

$$i_1 \quad = \quad X, \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ \dots$$

$$i_2 \quad = \quad X, \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ b_5 \ \dots$$

↑

Além disso, suponha que $b_5 > a_5$.

A ideia então, é considerar o seguinte número racional

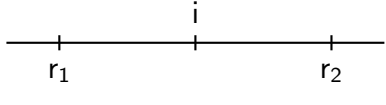
$$r \quad = \quad X, \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ b_5$$

E não é difícil de ver que

$$i_1 \quad < \quad r \quad < \quad i_2$$

A seguinte observação é a seguinte

Fato 2: *Entre todo par de racionais na reta dos números, existe um número irracional.*



Como é que a gente vê isso?

Bom, a gente também escreve as sequências de dígitos dos dois números racionais

— *(infinitas ou não)*

$$r_1 \quad = \quad X, \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ \dots$$

$$r_2 \quad = \quad X, \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ \dots$$

e localiza o primeiro dígito diferente

$$r_1 \quad = \quad X, \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ \dots$$

$$r_2 \quad = \quad X, \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ b_5 \ \dots$$

↑

— *(com $a_5 < b_5$)*

Dai, a gente considera o seguinte número irracional

$$i \quad = \quad X, \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ b_5 \ + \ \frac{\sqrt{2}}{10^k}$$

onde k é um número bem grande.

É bem fácil ver que i é um número irracional.

E nós também temos que

$$r_1 \quad < \quad i \quad < \quad r_2$$

Legal.

Os fatos 1 e 2 nos dão a ideia de que os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ tem o mesmo tamanho.

Mas, nós já sabemos que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ tem o mesmo tamanho.

Logo, nós chegamos à ideia de que $\mathbb{I}$ e $\mathbb{N}$ tem o mesmo tamanho.

Só que isso não é verdade ...

Quer dizer, a maneira de ver isso é um pouco indireta.

A ideia é mostrar que o intervalo de números reais



possui cardinalidade maior que $\mathbb{N}$.

Esse intervalo possui números racionais e irracionais.

Mas, a contribuição dos racionais é no máximo a cardinalidade de $\mathbb{N}$.

Logo, os irracionais tem uma contribuição maior do que a cardinalidade de $\mathbb{N}$.

Logo, o conjunto $\mathbb{I}$ tem cardinalidade maior que $\mathbb{N}$.

Mas, para chegar a essa conclusão é preciso mostrar que $(0, 1)$ tem cardinalidade maior que $\mathbb{N}$.

E para fazer isso, é mais fácil raciocinar na base 2.

Quer dizer, na base 2 os elementos do intervalo $(0, 1)$ corresponde a sequências infinitas da forma

$$(0, 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots)_2$$

Quando o número é racional essa sequência é repetitiva.

E quando o número é irracional ela não é.

Mas, isso não importa.

O ponto é que nós vamos apresentar um argumento por contradição.

Quer dizer, suponha que o conjunto $\mathbb{N}$ e o intervalo $(0, 1)$ tem a mesma cardinalidade.

Então, existe uma função bijetiva

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f(x)} (0, 1)$$

Dai, a gente pode usar essa função para construir uma tabela (infinita), com todos os números naturais e os elementos de $(0, 1)$ associados a eles

$\mathbb{N}$	$(0, 1)$
0	$(0, 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots)_2$
1	$(0, 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ \dots)_2$
2	$(0, 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots)_2$
3	$(0, 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots)_2$
$\vdots$	$\dots \quad \dots$

O ponto importante é que todos os elementos do intervalo $(0, 1)$ aparecem nessa tabela — *(porque?)*

Mas agora, nós vamos encontrar um elemento que não está na tabela.

Quer dizer, a ideia é olhar para a diagonal

$\mathbb{N}$	$(0, 1)$
0	$(0, 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots)_2$
1	$(0, 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ \dots)_2$
2	$(0, 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots)_2$
3	$(0, 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots)_2$
$\vdots$	$\dots \quad \dots$

E daí, a gente monta o nosso número invertendo o bit da diagonal em cada linha

$$x \quad = \quad (0, 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots)_2$$

A ideia é que o número x não está na tabela.

Quer dizer, para qualquer número natural k , nós temos que x é diferente do elemento que está associado a k na tabela.

Porque o $(k + 1)$ -ésimo bit de x é diferente do $(k + 1)$ -ésimo bit desse elemento

— *(i.e., o bit da diagonal ...)*

Logo, x não está na tabela.

Mas, isso contradiz o fato de que $f(x)$ é bijetiva.

Logo, o intervalo $(0, 1)$ e o conjunto $\mathbb{N}$ não possuem a mesma cardinalidade.

Exemplos

a. Os números reais

$$(\dots)$$

◇

b. O conjunto $\mathbb{R}^2$

$$(\dots)$$

◇

c. O conjunto de Cantor

$$(\dots)$$

◇