

Matemática Discreta

aula 12: O método da indução

1 Introdução

Considere a soma abaixo

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

Essa soma tem um padrão repetitivo bem simples (+1).

Daí, explorando esse padrão repetitivo, você pode resolver a soma assim

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

!

Mas agora, imagine que alguém pergunta

- *Quem garante que isso está certo?*

?

Bom, daí você pode responder

olha aqui:

!

- Para $n = 1$, a soma é apenas

$$1$$

e nesse caso, a coisa dá certo

$$1 = \frac{1 \cdot (1 + 1)}{2}$$

- Para $n = 2$, a soma é

$$1 + 2$$

e nesse caso, a coisa também dá certo

$$1 + 2 = 3 = \frac{2 \cdot (2 + 1)}{2}$$

- Para $n = 3$, a soma é

$$1 + 2 + 3$$

e nesse caso, a coisa também dá certo

$$1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3 \cdot (3 + 1)}{2}$$

Mas agora, a pessoa pode perguntar

- *Será que vai continuar assim pra sempre?*



Então você responde

Vai! porque tem um padrão repetitivo:



- Olhe para a soma que vai até 4

$$1 + 2 + 3 + 4$$

e veja que dentro dela aparece a soma que vai até 3

$$\underbrace{1 + 2 + 3}_{\frac{3 \cdot (3+1)}{2}} + 4$$

- Agora, a gente pode resolver a soma assim

$$\frac{3 \cdot (3+1)}{2} + 4$$

- Para isso, a gente reescreve a coisa assim

$$\frac{3 \cdot (3+1)}{2} + (3+1)$$

e depois assim

$$\frac{3 \cdot (3+1) + 2 \cdot (3+1)}{2}$$

e depois assim

$$\frac{(3+1) \cdot (3+2)}{2}$$

- E agora, é só observar que isso é igual a

$$\frac{4 \cdot (4+1)}{2}$$

Mas, a pessoa ainda não se convence

- *Mas será que isso não é só uma coincidência numérica?*



E daí, você responde

É não! isso vale para qualquer coisa (k):



- Imagine que a fórmula vale até o k

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$$

- Agora considere a soma que vai até o $k + 1$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k + k + 1$$

- Daí, a gente nota que a soma até k aparece aí dentro

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k}_{\frac{k \cdot (k+1)}{2}} + k + 1$$

- Logo, a gente pode calcular a soma assim

$$\frac{k \cdot (k + 1)}{2} + k + 1$$

- Para isso, a gente reescreve a coisa assim

$$\frac{k \cdot (k + 1)}{2} + \frac{2 \cdot (k + 1)}{2}$$

e depois assim

$$\frac{k \cdot (k + 1)}{2} + \frac{(1 + 1) \cdot (k + 1)}{2}$$

e depois assim

$$\frac{(k + 1) \cdot (k + 1 + 1)}{2}$$

- E agora a gente observa que isso é a fórmula para $k + 1$

$$\frac{(k + 1) \cdot ((k + 1) + 1)}{2}$$

Aqui finalmente a pessoa se convence

- *Ah sim! agora eu entendi ...* $\text{Q.E.D.}^{!!}$

Discussão

Mas, o que aconteceu?

Bom, o que aconteceu é que a gente encontrou outro padrão repetitivo

$$\frac{k \cdot (k + 1)}{2} + k + 1 = \frac{(k + 1) \cdot ((k + 1) + 1)}{2}$$

Quer dizer, essas duas coisas são a mesma coisa

$$\underbrace{\frac{k \cdot (k + 1)}{2}}_{*} + k + 1 = \underbrace{\frac{(k + 1) \cdot ((k + 1) + 1)}{2}}_{*}$$

— (*i.e.*, elas tem o mesmo formato ...)

Daí que, nós entramos em repetição



Logo, quando a gente observa que a coisa dá certo no começo

- $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$
- $1 + 2 = \frac{2 \cdot (2+1)}{2}$

a gente já pode concluir que vai continuar dando certo pra sempre ...

2 O método da indução

Considere a soma abaixo

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$$

Essa soma também tem um padrão repetitivo bem simples (+2).

Daí, explorando esse padrão repetitivo, você pode resolver a soma assim

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Mas alguém pode perguntar

- Quem garante que isso está certo?

Bom, daí você pode responder

Olha aqui:

- Para $n = 1$, a coisa dá certo

$$1 = 1^2$$

- Para $n = 2$, a coisa também dá certo

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

- Para $n = 3$, a coisa também dá certo

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

Mas agora, a pessoa pode perguntar

- Será que vai continuar assim pra sempre?

Então você responde

Vai! porque vale para qualquer coisa (k)



- Imagine que a fórmula vale até o k

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + k = k^2$$

- Agora considere a soma que vai até o $k+1$

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k-1) + (2k+1)$$

- Daí, a gente nota que a soma até k aparece aí dentro

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k-1)}_{k^2} + (2k+1)$$

- Logo, a gente pode calcular a soma assim

$$k^2 + 2k + 1$$

- Mas já é bem fácil ver que isso é igual a

$$(k+1)^2$$

- E agora a gente observa que isso é a fórmula para $k+1$

Entendi ...



Agora considere esse outro exemplo

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Os raciocínios que a gente viu na aula 02 para esse resultado não eram tão simples assim.

Mas, não é difícil verificar que a coisa dá certo para os primeiros valores de n

$$\begin{array}{ccccccc} 1^2 & + & 2^2 & + & 3^2 & + & \dots \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & 14 = \frac{3(3+1)(2 \cdot 3+1)}{6} \\ & & & & & \searrow & \\ & & & & & 5 = \frac{2(2+1)(2 \cdot 2+1)}{6} \\ & & & & \searrow & & \\ & & & & 1 = \frac{1(1+1)(1 \cdot 2+1)}{6} \end{array}$$

Certo.

Mas quem garante que a coisa não vai dar errado lá na frente?

Bom, a gente pode raciocinar assim

- Imagine que a coisa dá certo para um número k

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

- Daí a gente pergunta: *Será que dá certo para $k+1$?*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

- Bom, do lado esquerdo a gente vê a soma dos primeiros k quadrados.

E a gente já sabe quanto é isso — (*pelo Imagine que ...*)

Logo, a gente pode reescrever a coisa assim

$$\frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6} + (k+1)^2 \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

- Daí, a gente reescreve o lado esquerdo assim

$$\frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

depois assim

$$\frac{(k+1) \cdot (2k^2 + k + 6k + 6)}{6} \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

- Aqui é mais fácil reescrever o lado direito assim

$$\frac{(k+1) \cdot (2k^2 + k + 6k + 6)}{6} \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

depois assim

$$\frac{(k+1) \cdot (2k^2 + k + 6k + 6)}{6} \stackrel{?}{=} \frac{(k+1) \cdot (2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

- E aqui já dá para ver que a coisa também deu certo para $k+1$.

Logo a fórmula está correta.

Nós acabamos de ver o método da indução em ação.

E a seguir nós vamos ver outros exemplos

Exemplos

a. Soma de potências

Usando um truque bem velho, nós descobrimos na aula 01 que

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^n - 1$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 2 & + & 4 & + & 6 & + & 8 & + & \dots \\
 & & & & & & \searrow & & \\
 & & & & & & 12 & = & 3 \cdot 4 \\
 & & & & \searrow & & & & \\
 & & & & 6 & = & 2 \cdot 3 \\
 & & & \searrow & & & & & \\
 & & & 2 & = & 1 \cdot 2
 \end{array}$$

Mas, quem garante que não vai dar errado lá na frente?

Bom, a gente pode raciocinar assim

- Imagine que a coisa dá certo para o k -ésimo par $2k$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k \cdot (k+1)$$

- Daí a gente pergunta: *Será que dá certo para o $(k+1)$ -ésimo par?*

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + (2k+2) \stackrel{?}{=} (k+1) \cdot (k+2)$$

- Bom, do lado esquerdo a gente vê a soma até o k -ésimo ímpar.

E a gente já sabe quanto é isso — (pelo *Imagine que ...*)

Logo, a gente pode reescrever a coisa assim

$$k \cdot (k+1) + (2k+2) \stackrel{?}{=} (k+1) \cdot (k+2)$$

- Daí, a gente reescreve a coisa assim

$$k \cdot (k+1) + 2 \cdot (k+1) \stackrel{?}{=} (k+1) \cdot (k+1)$$

e depois assim

$$(k+2) \cdot (k+1) \stackrel{?}{=} (k+1) \cdot (k+1)$$

- E aqui a gente vê que a coisa deu certo para $k+1$.

Logo, a fórmula está correta.

◇

c. Soma com coeficientes

Na aula 01, a gente viu que

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

Mas, quem garante que essa fórmula está correta?

Bom, é bem fácil ver que a coisa dá certo para os primeiros valores de n

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1 \cdot 2^1 & + & 2 \cdot 2^2 & + & 3 \cdot 2^3 & + & 4 \cdot 2^4 & + & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 10 & = & (2-1) \cdot 2^{2+1} + 2 & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 2 & = & (1-1) \cdot 2^{1+1} + 2 & & & &
 \end{array}$$

Mas, quem garante que não vai dar errado lá na frente?

Bom, a gente pode raciocinar assim

- Imagine que a coisa dá certo para um número k

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + k \cdot 2^k = (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$$

- Daí a gente pergunta: *Será que dá certo para $k+1$?*

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \dots + k \cdot 2^k + (k+1) \cdot 2^{k+1} \stackrel{?}{=} k \cdot 2^{k+2} + 2$$

- Bom, do lado esquerdo a gente vê a soma até o k -ésimo termo.

E a gente já sabe quanto é isso — (pelo *Imagine que ...*)

Logo, a gente pode reescrever a coisa assim

$$(k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + (k+1) \cdot 2^{k+1} \stackrel{?}{=} k \cdot 2^{k+2} + 2$$

- Daí, a gente reescreve o lado esquerdo assim

$$2 \cdot k \cdot 2^{k+1} + 2 \stackrel{?}{=} k \cdot 2^{k+2} + 2$$

e depois assim

$$k \cdot 2^{k+2} + 2 \stackrel{?}{=} k \cdot 2^{k+2} + 2$$

- E aqui já dá pra ver que a coisa deu certo para $k+1$.

Logo, a fórmula está correta.

◇

d. Soma de Fibonacci

Na lista de exercícios 01, a gente viu que

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Mas, quem garante que essa fórmula está correta?

Bom, é bem fácil ver que a coisa dá certo para os primeiros valores de n

$$\begin{array}{ccccccccc}
& F_1 & + & F_2 & + & F_3 & + & F_4 & + & \dots \\
= & 1 & + & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots \\
& & & & & \searrow & & \searrow & & \\
& & & & & & 4 & = & F_5 - 1 \\
& & & & \searrow & & & & & \\
& & & & & 2 & = & F_4 - 1 \\
& & & \searrow & & & & & & \\
& & & & 1 & = & F_3 - 1
\end{array}$$

Mas, quem garante que não vai dar errado lá na frente?

Bom, a gente pode raciocinar assim

- Imagine que a coisa dá certo até o k -ésimo termo

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_k = F_{k+2} - 1$$

- Daí a gente pergunta: *Será que dá certo até o termo F_{k+1} ?*

$$F_1 + F_2 + \dots + F_k + F_{k+1} \stackrel{?}{=} F_{k+3} - 1$$

- Bom, do lado esquerdo a gente vê a soma até o k -ésimo termo.

E a gente já sabe quanto isso dá — (*pelo Imagine que ...*)

Logo, a gente pode reescrever a coisa assim

$$F_{k+2} - 1 + F_{k+1} \stackrel{?}{=} F_{k+3} - 1$$

- Daí, a gente reescreve o lado esquerdo assim

$$F_{k+3} - 1 \stackrel{?}{=} F_{k+3} - 1$$

- E aqui já dá pra ver que a coisa deu certo para $k+1$.

Logo, a fórmula está correta.

◇

e. Soma de PA

Agora, considere a seguinte soma

$$(2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + \dots + (4n-1)$$

Para calcular essa soma, primeiro a gente reescreve o último termo assim

$$(2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + \dots + (2n + (2n-1))$$

E daí, a gente reescreve a soma assim

$$\begin{array}{cccccccc} 2n & + & 2n & + & 2n & + & \dots & + & 2n \\ + & 1 & + & 3 & + & 5 & + & \dots & + & 2n-1 \end{array}$$

Agora é fácil ver que a soma vale

$$n \cdot 2n + n^2 = 3n^2$$

Mas, quem garante que isso está certo?

Bom, é bem fácil ver que a coisa dá certo para os primeiros valores de n

- $n = 1$: $(2 \cdot 1 + 1) = 3 = 3 \cdot 1^2$
- $n = 2$: $(2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 2 + 3) = 12 = 3 \cdot 2^2$
- $n = 3$: $(2 \cdot 3 + 1) + (2 \cdot 3 + 3) + (2 \cdot 3 + 5) = 27 = 3 \cdot 3^2$

Mas, quem garante que não vai dar errado lá na frente?

Bom, a gente pode raciocinar assim

- Imagine que a coisa dá certo até um número k

$$(2k+1) + (2k+3) + (2k+5) + \dots + (4k-1) = 3k^2$$

- Daí a gente pergunta: *Será que dá certo para $k+1$?*

$$(2(k+1)+1) + (2(k+1)+3) + \dots + (4(k+1)-1) \stackrel{?}{=} 3(k+1)^2$$

- Fazendo as continhas dentro dos parênteses, a gente chega em

$$(2k+3) + (2k+5) + (2k+7) + \dots + (4k+3) \stackrel{?}{=} 3(k+1)^2$$

- E daí, a gente nota que a soma do caso k não aparece no lado esquerdo.

Porque o termo $(2k+1)$ está faltando.

- Ora, mas isso é bem fácil de resolver.

Quer dizer, basta somar $(2k+1)$ dos dois lados

$$\begin{array}{ccccccccccc} (2k+3) & + & (2k+5) & + & (2k+7) & + & \dots & + & (4k+3) & \stackrel{?}{=} & 3(k+1)^2 \\ + & (2k+1) & & & & & & & & & + & (2k+1) \end{array}$$

- Agora, do lado esquerdo a gente vê a soma do caso k .

E a gente já sabe quanto isso dá — *(pelo Imagine que ...)*

Logo, a gente pode reescrever a coisa assim

$$3k^2 + (4k+1) + (4k+3) \stackrel{?}{=} 3(k+1)^2 + 2k+1$$

e depois assim

$$3k^2 + 8k + 4 \stackrel{?}{=} 3k^2 + 6k + 3 + 2k+1$$

- E aqui já dá pra ver que a coisa deu certo para $k+1$.

◇

3 O método da advinhação

Agora considere a soma

$$S_2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1) \cdot n$$

Quanto é isso?

Sei lá!

Bom, mas a gente pode fazer a seguinte esperteza

$$\begin{array}{r} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1) \cdot n \\ + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + 2 \cdot n \\ \hline = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots + n \cdot (n+1) \end{array}$$

Ora, mas o resultado é quase a nossa soma S outra vez

Quer dizer, nós acabamos de descobrir que

$$S_2 + 2 \cdot (2 + 3 + 4 + \dots + n) = S_2 - 1 \cdot 2 + n \cdot (n+1)$$

o que acaba nos levando a

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Certo.

Só que isso a gente já sabia.

E a gente ainda continua sem saber quanto é a soma S_2 ...

Mas, considere agora a soma

$$S_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

A ideia é aplicar a mesma esperteza outra vez

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 1 \cdot 2 \cdot 3 & + & 2 \cdot 3 \cdot 4 & + & 3 \cdot 4 \cdot 5 & + & \dots & + & (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \\
 + & 3 \cdot 2 \cdot 3 & + & 3 \cdot 3 \cdot 4 & + & 3 \cdot 4 \cdot 5 & + & \dots & + & 3 \cdot (n-1) \cdot n \\
 \hline
 = & 2 \cdot 3 \cdot 4 & + & 3 \cdot 4 \cdot 5 & + & 4 \cdot 5 \cdot 6 & + & \dots & + & (n-1) \cdot n \cdot (n+1)
 \end{array}$$

Quer dizer, o resultado é quase a soma S outra vez.

Daí que, a gente acabou de descobrir que

$$S_3 + 3 \cdot (2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots + (n-1) \cdot n) = S_3 - 1 \cdot 2 \cdot 3 + (n-1) \cdot n \cdot (n+1)$$

o que acaba nos levando a

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}$$

que é o resultado da soma S_2 .

Legal, não é?

Sim é, mas a gente continua sem saber quanto é a soma S_3 ...

Pois é.

Mas agora já dá para adivinhar que basta aplicar a esperteza outra vez sobre a soma

$$S_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + \dots + (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

E também já dá para adivinhar que no final a gente vai descobrir que

$$S_3 = \frac{(n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{4}$$

Hmm, pode ser.

Mas quem garante que isso está certo?

Bom, a gente pode provar isso por indução.

Quer dizer, veja que a coisa funciona para os primeiros valores de n

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 \cdot 2 \cdot 3 & + & 2 \cdot 3 \cdot 4 & + & 3 \cdot 4 \cdot 5 & + & \dots \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
 & & & & 90 & = & \frac{(5-2) \cdot (5-1) \cdot 5 \cdot (5+1)}{4} \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
 & & & & 30 & = & \frac{(4-2) \cdot (4-1) \cdot 4 \cdot (4+1)}{4} \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
 & & & & 6 & = & \frac{(3-2) \cdot (3-1) \cdot 3 \cdot (3+1)}{4}
 \end{array}$$

Certo.

Mas quem garante que não vai dar errado lá na frente?

Bom, a gente garante isso com o seguinte raciocínio

- Imagine que a fórmula dá a resposta correta até o k -ésimo termo

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + (k-2) \cdot (k-1) \cdot k + \dots$$

$$\downarrow$$

$$\frac{(k-2) \cdot (k-1) \cdot k \cdot (k+1)}{4}$$

- No próximo passo, a soma ganha o termo $(k-1) \cdot k \cdot (k+1)$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + \dots + (k-2) \cdot (k-1) \cdot k + (k-1) \cdot k \cdot (k+1) + \dots$$

$$\downarrow$$

$$\frac{(k-2) \cdot (k-1) \cdot k \cdot (k+1)}{4}$$

- Logo, a resposta correta no próximo passo é

$$\frac{(k-2) \cdot (k-1) \cdot k \cdot (k+1)}{4} + (k-1) \cdot k \cdot (k+1)$$

- E agora, fazendo algumas continhas a gente vê que isso é igual a

$$= \frac{(k-2) \cdot (k-1) \cdot k \cdot (k+1) + 4 \cdot (k-1) \cdot k \cdot (k+1)}{4}$$

$$= \frac{(k-1) \cdot k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{4}$$

- Ora, mas essa é a resposta da fórmula para o próximo passo.

Logo a fórmula para S_3 está correta.

Legal!

Agora é a sua vez.

Quanto é

$$S_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \quad ?$$