

Matemática Discreta

lista de exercícios 12

1. Tira teima

Demonstre os seguintes resultados pelo método da indução

$$\text{a)} \quad 1 + k + k^2 + \dots + k^n = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$$

$$\text{b)} \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\text{c)} \quad \frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{3^2 - 1} + \frac{1}{4^2 - 1} + \dots + \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{(n-1) \cdot (3n+2)}{4n \cdot (n+1)}$$

$$\text{d)} \quad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

$$\text{e)} \quad \sum_{j=1}^n \frac{j}{(j+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

2. Será

Será que isso aqui é verdade

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Sim, é verdade!

Mas você deve provar isso por indução.

3. Quanto é?

Calcule as somas abaixo, e depois prove por indução que a sua resposta está certa.

$$\text{a)} \quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2$$

$$\text{b)} \quad \frac{1}{4 \cdot 1^2 - 1} + \frac{1}{4 \cdot 2^2 - 1} + \frac{1}{4 \cdot 3^2 - 1} + \dots + \frac{1}{4 \cdot n^2 - 1}$$

$$\text{c)} \quad 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + (n+1) \cdot 2^n$$

$$\text{d)} \quad \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}$$

$$\text{e)} \quad \sum_{k=1}^n (k-1) \cdot (k+1)$$

4. Mais somas de Fibonacci?

Lembre que os primeiros números de Fibonacci são

$$f_1 = 1 \quad \text{e} \quad f_2 = 1$$

E que os demais são calculados pela seguinte regra

$$f_k = f_{k-2} + f_{k-1}$$

Calcule as somas abaixo, e depois prove por indução que a sua resposta está certa

- a) $f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n}$
- b) $f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1}$
- c) $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n^2$

5. O método da advinhação

- a) Advinhe quanto é a soma

$$S_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

E depois prove por indução que a sua resposta está certa.

- b) Calcule a soma abaixo, e depois prove por indução que a sua resposta está certa.

$$\text{b1)} \quad 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + (n-2) \cdot n$$

Agora, advinhe a resultado dessas outras duas somas, e prove por indução que a sua resposta está certa.

$$\text{b2)} \quad 1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \dots + (n-4) \cdot (n-2) \cdot n$$

$$\text{b3)} \quad 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 + 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 + \dots + (n-6) \cdot (n-4) \cdot (n-2) \cdot n$$

6. Quebra-cabeças

Você consegue calcular essa soma

$$f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_3 + f_3 \cdot f_4 + \dots + f_{n-1} \cdot f_n \quad ?$$

Se você conseguir, prove por indução que a sua resposta está certa.

7. Triângulos ao quadrado

Prove por indução que

$$t_{n+1}^2 - t_n^2 = (n+1)^3$$

Nota: Lembre que

$$t_k = 1 + 2 + 3 + \dots + k$$

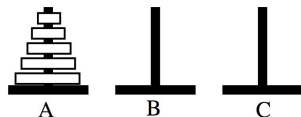
8. Identidade de Galileo

Prove por indução (ou não) que

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \dots = \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\dots+(4n-1)}$$

9. Torres de Hanoi

A figura abaixo ilustra o jogo das torres de Hanoi



O problema consiste em mover os discos da haste A para a haste C, com o auxílio da haste B, sem nunca colocar um disco maior sobre um disco menor.

Por exemplo, a solução com três discos 1,2,3 fica assim

- mover disco 1 de A para C
- mover disco 2 de A para B
- mover disco 1 de C para B
- mover disco 3 de A para C
- mover disco 1 de B para A
- mover disco 2 de B para C
- mover disco 1 de A para C

Encontre uma estratégia geral para resolver o problema com n discos.

Dê um palpite para o número de movimentos realizados pela sua estratégia.

E depois prove por indução que o seu palpite está certo.

10. O problema dos baldes de tinta

Imagine que você tem n baldes do mesmo tamanho.

Imagine que cada balde tem $n - 1/n$ do seu volume ocupado com tinta.

E imagine que todos os baldes contém tintas de cor diferente.

Você pode despejar qualquer quantidade de tinta de um balde para outro — (*sem derramar*)

O problema consiste em misturar as tintas de modo que todos os baldes contenham uma tinta da mesma cor.